

電源平滑回路の近似的解析（Ⅱ）

—半波整流波， π 形回路について—

技術研究室 新妻 陸 利

(1968年10月21日受理)

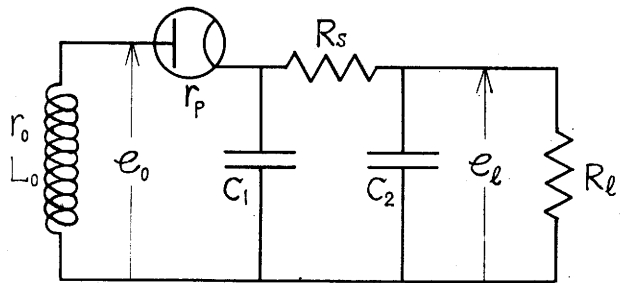
I 緒 言

中学校の題材にもなっている第1図のようなラジオの電源平滑回路部を、いきなり数式的に取扱おうとすると、 C_1 にかかる電圧波形が *sine* の整流波であるし、回路には L , C , R が含まれているので、複雑、難解な過渡現象となる。

そこで、この回路をできるだけ簡単に取扱おうと試み、^{(1), (2)} 何回かその方法を発表してきた。

今回は、比較的値の小さい L_0 を省略し、⁽²⁾ 電源波形を前回と同様に等価矩形波とみなし近似的解析を試みることにした。

第1図 電源平滑回路



$$e_0 = E_{om} \sin \omega t$$

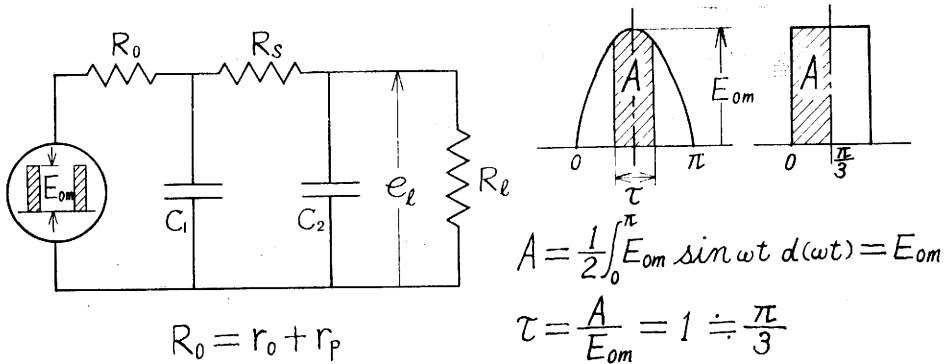
e_l : 負荷端子電圧

II π 形回路の近似的解析

1. π 形回路と等価矩形波

第1図の電源平滑回路の L_0 を省略して等価回路を書くと、第2図のような π 形回路になる。また、電源電圧波形は、最大値 E_{om} が *sine* の最大値 E_{om} に等しく、その幅 τ が $\pi/3$ [rad.] であるような矩形波とみなすことにする。コンデンサの充放電には、その波形の最大値 E_{om} と、その最大値を含む幅 τ が最も関係するので、*sine* の整流波のうち、充放電に関係する部分を、その全面積の $1/2$ でしかも最大値 E_{om} を含む部分とみなし、等価矩

第2図 π形回路と等価矩形波

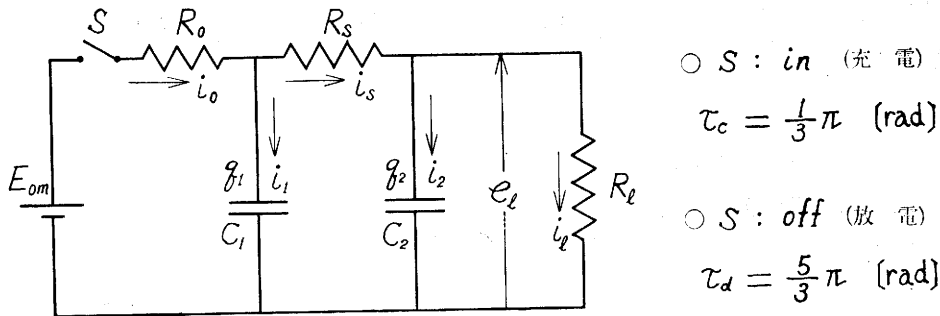


形波を考えたのである。このように考えると、回路は $\pi/3$ [rad.] の期間だけ充電され、 $5\pi/3$ [rad.] の期間だけ放電されることになる。

2. 近似的解析

以上のように考えて、等価回路を書き直すと、第3図のような直流過渡回路になる。

第3図 π形回路の解析



電流や電荷を第3図のように定めて微分方程式を立て、 R_l の端子電圧 e_l を求めてみる。なおスイッチ S は、 $\pi/3$ [rad.] の期間だけ入り、 $5\pi/3$ [rad.] の期間だけ切れ、それが交互に繰返されることになる。

(1) 充電の場合

第3図の回路にキルヒホッフの法則を適用すると、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} R_0 i_0 + \frac{1}{C_1} q_1 = E_{om} & \dots\dots\dots ① \\ R_s i_s + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C_1} q_1 = 0 & \dots\dots\dots ② \\ R_l i_l - \frac{1}{C_2} q_2 = 0 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_o = i_s + \frac{dq_{1c}}{dt} & \dots\dots\dots ④ \\ i_s = i_l + \frac{dq_{2c}}{dt} & \dots\dots\dots ⑤ \end{cases}$$

ここで q_{1c}, q_{2c} は、それぞれ q_1, q_2 の充電の場合の電荷を意味する。

i_o, i_s, i_l を消去して、 q_{1c}, q_{2c} でまとめると

$$\left\{ \begin{aligned} R_o \frac{dq_{1c}}{dt} + \frac{1}{C_1} q_{1c} + R_o \frac{dq_{2c}}{dt} + \frac{R_o}{C_2 R_l} q_{2c} &= E_{om} & \dots\dots\dots ⑥ \\ \frac{1}{C_1} q_{1c} - R_s \frac{dq_{2c}}{dt} - \frac{1}{C_2} \left(1 + \frac{R_s}{R_l}\right) q_{2c} &= 0 & \dots\dots\dots ⑦ \end{aligned} \right.$$

⑦より

$$q_{1c} = C_1 R_s \frac{dq_{2c}}{dt} + \frac{C_1}{C_2} \left(1 + \frac{R_s}{R_l}\right) q_{2c} \quad \dots\dots\dots ⑧$$

⑧を⑥へ代入して整理すると

$$\frac{d^2 q_{2c}}{dt^2} + \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_s}\right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_l}\right) \right\} \frac{dq_{2c}}{dt} + \frac{R_o + R_s + R_l}{C_1 C_2 R_o R_s R_l} q_{2c} = \frac{E_{om}}{C_1 R_o R_s} \quad \dots\dots\dots ⑨$$

⑨の過渡項 q_{2ct} は、 $q_{2ct} = A e^{pt}$ である。ここで p は

$$p = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_s}\right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_l}\right) \right\} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_s}\right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_l}\right) \right\}^2 - \frac{R_o + R_s + R_l}{C_1 C_2 R_o R_s R_l}}$$

であり、実際の回路では $\sqrt{\quad}$ 内は正となるから、 $p_1 = -(\alpha - \beta)$, $p_2 = -(\alpha + \beta)$ とおき、

$$q_{2ct} = A e^{-(\alpha - \beta)t} + B e^{-(\alpha + \beta)t} \quad \dots\dots\dots ⑩$$

となる。ただし α, β は次の値である。

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_s}\right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_l}\right) \right\} \\ \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{R_o + R_s + R_l}{C_1 C_2 R_o R_s R_l}} \end{cases}$$

また、⑨の定常項 q_{2cs} は

$$q_{2cs} = \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \quad \dots\dots\dots ⑪$$

となる。

よって q_{2c} の一般解は、⑩と⑪との和であるから

$$\therefore q_{2c} = \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} + A e^{-(\alpha - \beta)t} + B e^{-(\alpha + \beta)t} \quad \dots\dots\dots ⑫$$

次に、⑫を⑧へ代入して整理すると

$$q_{1c} = \frac{C_1 (R_s + R_l) E_{om}}{R_o + R_s + R_l} + \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} A e^{-(\alpha - \beta)t} + \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha + \beta) \right\} B e^{-(\alpha + \beta)t} \quad \dots\dots\dots ⑬$$

⑫と⑬へ、 $t=0$ で $q_{1c} = Q_{1a}$, $q_{2c} = Q_{2a}$ なる初期条件を代入し、積分定数 A, B を求めると

$$\begin{cases} A = Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{C_1 R_s} \left[\left\{ Q_{1a} - \frac{C_1 (R_s + R_l) E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \right. \\ \quad \left. - \left\{ Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} \right] \\ B = -\frac{1}{2\beta} \frac{1}{C_1 R_s} \left[\left\{ Q_{1a} - \frac{C_1 (R_s + R_l) E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \right. \\ \quad \left. - \left\{ Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} \right] \end{cases}$$

この A, B の値を⑫, ⑬へ代入すると、充電の場合の最終的な結果が求められる。

$$\begin{aligned} q_{1c} = & \frac{C_1 (R_s + R_l) E_{om}}{R_o + R_s + R_l} + \left\{ Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} \varepsilon^{-(\alpha - \beta)t} \\ & + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{C_1 R_s} \left[\left\{ Q_{1a} - \frac{C_1 (R_s + R_l) E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} \right] \\ & \times \left[\left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} \varepsilon^{-(\alpha - \beta)t} - \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha + \beta) \right\} \varepsilon^{-(\alpha + \beta)t} \right] \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} q_{2c} = & \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} + \left\{ Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \varepsilon^{-(\alpha - \beta)t} \\ & + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{C_1 R_s} \left[\left\{ Q_{1a} - \frac{C_1 (R_s + R_l) E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} - \left\{ Q_{2a} - \frac{C_2 R_l E_{om}}{R_o + R_s + R_l} \right\} \left\{ \frac{C_1 (R_s + R_l)}{C_2 R_l} - C_1 R_s (\alpha - \beta) \right\} \right] \\ & \times \left[\varepsilon^{-(\alpha - \beta)t} - \varepsilon^{-(\alpha + \beta)t} \right] \end{aligned} \tag{15}$$

なお、負荷端子電圧 e_{lc} は

$$e_{lc} = R_l i_l = -\frac{1}{C_2} q_{2c} \tag{16}$$

として求まる。

(2) 放電の場合

充電の場合と同様に、次のような連立方程式が得られる。ただし q_{1a}, q_{2a} は、それぞれ q_1, q_2 の放電の場合の電荷を意味する。

$$\begin{cases} \frac{1}{C_1} q_{1a} + R_s \frac{dq_{1a}}{dt} - \frac{1}{C_2} q_{2a} = 0 & \dots\dots\dots (17) \\ \frac{1}{C_2} q_{2a} - R_l i_l = 0 & \dots\dots\dots (18) \\ i_l = -\frac{dq_{1a}}{dt} - \frac{dq_{2a}}{dt} & \dots\dots\dots (19) \end{cases}$$

⑰より

$$q_{2a} = C_2 R_s \frac{dq_{1a}}{dt} + \frac{C_2}{C_1} q_{1a} \dots\dots\dots ⑳$$

⑱へ⑰, ⑳を代入し, 整理すると

$$\frac{d^2 q_{1a}}{dt^2} + \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_l} \right) + \frac{1}{C_1 R_s} \right\} \frac{dq_{1a}}{dt} + \frac{1}{C_1 C_2 R_s R_l} q_{1a} = 0 \dots\dots\dots ㉑$$

前と同様にして, ㉑の一般解は㉒となる。

$$q_{1a} = A \varepsilon^{-(\gamma-\delta)t} + B \varepsilon^{-(\gamma+\delta)t} \dots\dots\dots ㉒$$

ただし, γ と δ は次の値であり, $\sqrt{\quad}$ 内は正となる。

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_l} \right) + \frac{1}{C_1 R_s} \right\} \\ \delta = \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{C_1 C_2 R_s R_l}} \end{cases}$$

㉒を㉑へ代入して整理すると

$$q_{2a} = \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} A \varepsilon^{-(\gamma-\delta)t} + \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma + \delta) \right\} B \varepsilon^{-(\gamma+\delta)t} \dots\dots\dots ㉓$$

㉒と㉓へ, $t=0$ で $q_{1a} = Q_{1c}$, $q_{2a} = Q_{2c}$ なる初期条件を代入し, 積分定数 A, B を求めると

$$\begin{cases} A = Q_{1c} - \frac{1}{2\delta} \frac{1}{C_2 R_s} \left[Q_{1c} \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} - Q_{2c} \right] \\ B = \frac{1}{2\delta} \frac{1}{C_2 R_s} \left[Q_{1c} \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} - Q_{2c} \right] \end{cases}$$

この A, B の値を㉒, ㉓へ代入すると, 放電の場合の最終的な結果が求められる。

$$q_{1a} = Q_{1c} \varepsilon^{-(\alpha-\delta)t} - \frac{1}{2\delta} \frac{1}{C_2 R_s} \left[Q_{1c} \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} - Q_{2c} \right] \left[\varepsilon^{-(\gamma-\delta)t} - \varepsilon^{-(\gamma+\delta)t} \right] \dots\dots\dots ㉔$$

$$\begin{aligned} q_{2a} = Q_{1c} \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} \varepsilon^{-(\gamma-\delta)t} - \frac{1}{2\delta} \frac{1}{C_2 R_s} \left[Q_{1c} \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} - Q_{2c} \right] \\ \times \left[\left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma - \delta) \right\} \varepsilon^{-(\gamma-\delta)t} - \left\{ \frac{C_2}{C_1} - C_2 R_s (\gamma + \delta) \right\} \varepsilon^{-(\gamma+\delta)t} \right] \dots\dots\dots ㉕ \end{aligned}$$

なお, 負荷端子電圧 e_{ia} は, 充電の場合と同じように

$$e_{ia} = R_l i_i = \frac{1}{C_2} q_{2a} \dots\dots\dots ㉖$$

として求められる。

Ⅲ 数値計算例

以上の解析結果へ, 実際の数値をあてはめて計算し, その結果をグラフにしてみる。

数値 $\begin{cases} E_{om}=400V \text{ (実効値で} 283V), C_1=20\mu F, C_2=20\mu F, \\ R_o=0.8k\Omega, R_s=3k\Omega, R_l=10k\Omega, \\ f=50\% \text{ なら, } t_c=\frac{1}{300}\text{sec}, t_a=\frac{5}{300}\text{sec}. \end{cases}$

以上の数値を, (14), (15), (16), (24), (25), (26)へ代入して計算すると, それぞれ次の式になる。

(1) 充電終了時

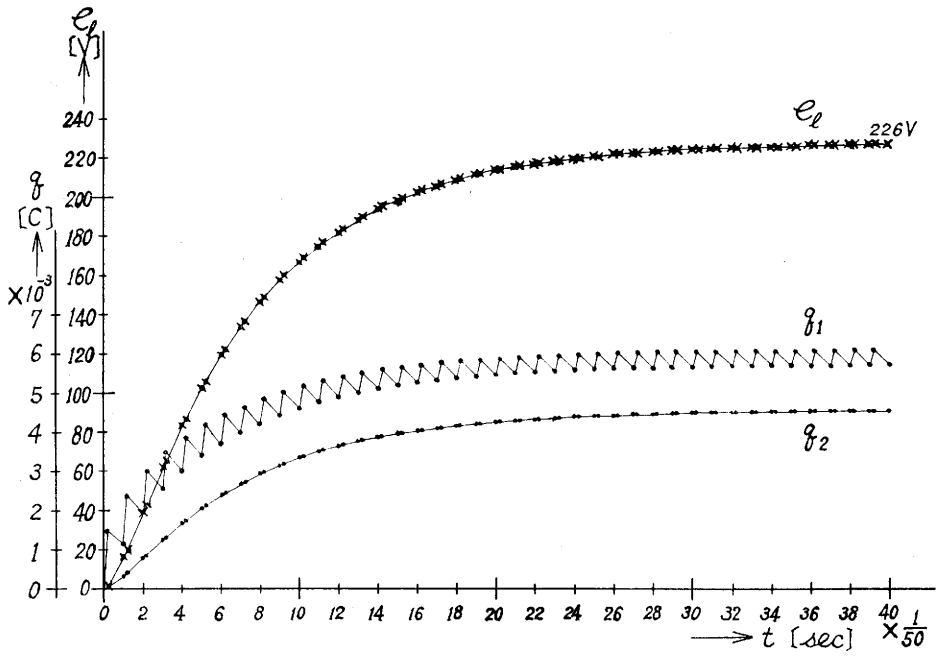
$$\begin{cases} q_{1c}=1.466 \times 10^{-3} + 0.769 Q_{1a} + 0.047 Q_{2a} & \text{[C]} \dots\dots\dots (27) \\ q_{2c}=0.043 \times 10^{-3} + 0.047 Q_{1a} + 0.932 Q_{2a} & \text{[C]} \dots\dots\dots (28) \\ e_{1c}=2.15 + 2.35 \times 10^3 Q_{1a} + 46.59 \times 10^3 Q_{2a} & \text{[V]} \dots\dots\dots (29) \end{cases}$$

(2) 放電終了時

$$\begin{cases} q_{1a}=0.786 Q_{1e} + 0.205 Q_{2e} & \text{[C]} \dots\dots\dots (30) \\ q_{2a}=0.205 Q_{1e} + 0.725 Q_{2e} & \text{[C]} \dots\dots\dots (31) \\ e_{1a}=10.2 \times 10^3 Q_{1e} + 36.3 \times 10^3 Q_{2e} & \text{[V]} \dots\dots\dots (32) \end{cases}$$

(27), (28), (29)はそれぞれ充電終了時(放電開始時)の C_1 の電荷, C_2 の電荷, 負荷端子電圧を示し, (30), (31), (32)はそれぞれ放電終了時(充電開始時)の C_1 の電荷, C_2 の電荷, 負荷端子電圧を示している。最初は $Q_{1a}=0, Q_{2a}=0$ なる値から充電が開始され, (27), (28), (29)で充電が終了し, その q_{1c}, q_{2c}, e_{1c} の値から放電が開始され, (30), (31), (32)で放電が終了し,

第4図 数値計数結果のグラフ



第1表 数値計算結果

充電の場合				放電の場合			
t_c [sec]	q_{1c} [C]	q_{2c} [C]	e_{1c} [V]	t_a [sec]	q_{1a} [C]	q_{2a} [C]	e_{1a} [V]
$1 \times \frac{1}{300}$	1.47×10^{-3}	0.04×10^{-3}	2.2	$1 \times \frac{1}{50}$	1.16×10^{-3}	0.33×10^{-3}	16.6
7	2.38	0.41	20.4	2	1.96	0.78	39.2
13	3.01	0.87	43.3	3	2.54	1.24	62.2
19	3.48	1.32	66.1	4	3.01	1.67	83.7
25	3.86	1.74	87.2	5	3.39	2.06	102.8
31	4.18	2.12	105.9	6	3.72	2.39	119.6
37	4.44	2.45	122.4	7	3.99	2.69	134.2
43	4.67	2.73	136.6	8	4.23	2.94	146.9
49	4.86	2.98	149.0	9	4.43	3.16	157.8
55	5.03	3.19	159.7	10	4.60	3.35	167.3
61	5.17	3.38	168.9	11	4.75	3.51	175.4
67	5.29	3.54	176.8	12	4.88	3.65	182.4
73	5.40	3.67	183.6	13	5.00	3.77	188.5
79	5.49	3.79	189.5	14	5.09	3.87	193.7
85	5.57	3.89	194.6	15	5.17	3.96	198.2
91	5.64	3.98	199.0	16	5.25	4.04	202.0
97	5.69	4.06	202.8	17	5.31	4.11	205.4
103	5.74	4.12	206.0	18	5.36	4.16	208.2
109	5.79	4.18	208.8	19	5.40	4.21	210.7
115	5.82	4.22	211.2	20	5.44	4.26	212.8
121	5.86	4.27	213.3	21	5.48	4.29	214.7
127	5.88	4.30	215.1	22	5.51	4.33	216.3
133	5.91	4.33	216.6	23	5.53	4.35	217.6
139	5.93	4.36	218.0	24	5.55	4.38	218.8
145	5.95	4.38	219.1	25	5.57	4.40	219.8
151	5.96	4.40	220.1	26	5.59	4.41	220.7
157	5.98	4.42	221.0	27	5.60	4.43	221.4
163	5.99	4.43	221.7	28	5.61	4.44	222.1
169	6.00	4.45	222.3	29	5.62	4.45	222.7
175	6.00	4.46	222.9	30	5.63	4.46	223.1
181	6.01	4.47	223.4	31	5.64	4.47	223.6
187	6.02	4.48	223.8	32	5.65	4.48	223.9
193	6.02	4.48	224.1	33	5.65	4.48	224.2
199	6.03	4.49	224.4	34	5.66	4.49	224.5
205	6.03	4.49	224.7	35	5.66	4.49	224.7
211	6.04	4.50	224.9	36	5.67	4.50	224.9
217	6.04	4.50	225.1	37	5.67	4.50	225.1
223	6.04	4.51	225.2	38	5.67	4.50	225.2
229	6.04	4.51	225.4	39	5.67	4.51	225.4
235	6.05	4.51	225.5	40	5.68	4.51	225.5
295	6.05	4.52	226.1	50	5.69	4.52	226.0
355	6.06	4.53	226.2	60	5.69	4.52	226.1
415	6.06	4.53	226.3	70	5.69	4.52	226.1

また充電が開始されるのである。このようにして順次充放電が繰返されることになる。それらの計算結果を第1表と、第4図のグラフに示す。

なお、この数値計算は、電子計算機 (HIPAC 103) を利用したので、そのプログラムも次に示しておく。

[q_{1c} , q_{2c} , e_{1c} , q_{1a} , q_{2a} , e_{1a} を求めるプログラム]

```

PRINT 10
10 FORMAT (////35×47HAPPRO×IMATESpSp ANALYSSISpSpOFSpSpASpSpPOWE
RSpSpSUPPLYSpSpII//)
PRINT 11
11 FORMAT (29×1HT7×3HQ1C7×3HQ2C7×3HELC7×3HQ1D7×3HQ2D7×3HELD/)
PRINT 12
12 FORMAT (37×1H×Sp5H0.0013×1H×Sp5H0.00113×1H×Sp5H0.0013×1H×Sp5H0.001)
Q1D=0.
Q2D=0.
13 DO15 I=1,100
Q1C=1.466+0.769*Q1D+0.047*Q2D
Q2C=0.043+0.047*Q1D+0.932*Q2D
ELC=Q2C*50.
Q1D=0.786*Q1C+0.205*Q2C
Q2D=0.205*Q1C+0.725*Q2C
ELD=Q2D*50.
PRINT 14, I, Q1C, Q2C, ELC, Q1D, Q2D, ELD
14 FORMAT (I30, 2 (F10.3, F10.2))
15 CONTINUE
END

```

以上の結果から、次のようなことが明らかにされた。

過渡状態から定常状態への移行は1秒でいどであり、スイッチを入れる瞬間の状態によって多少の誤差はあるにしても、ほぼ実験結果と一致した。

また、計算では定常状態での負荷端子電圧は約226Vであり、実験結果では、電源に283Vの交流を加えた時の負荷端子の直流電圧は221Vであった。

このように計算結果と実験結果がほぼ一致しており、他の数値の場合でも、計算結果と実験結果では、数%の誤差にしか過ぎない。

Ⅳ 結 言

等価矩形波を使って電源平滑回路を近似的に解析する試みは、ほぼ目的通りに達成できた。もちろん多少の誤差は止むを得ないが、それも数%にしか過ぎず、*sine*の整流波のまま L_0 も含めて解析するよりはるかに簡単に解析ができ、結果的にはこのような考え方で解析しても、実用上差支えないことが証明された。

最後に、この研究に対して助言をいただいた、工学部の秋山さん、理学部の小野瀬さんに、お礼を申し上げる次第です。

参 考 文 献

- (1) 新妻・小室 フーリエ級数による電源平滑回路の解析 日本産業技術教育学会誌 10号
- (2) 新妻・小室 電源平滑回路の近似的解析Ⅰ 日本産業技術教育学会誌 11号