茨城大学教育学部紀要（自然科学），28号（1979），1-12．

孤立特異点の分類とそのモジュライ問題

工　藤　研　二

（1978年10月11日受理）

Classification of Isolated Singularities and Its Moduli Problem

Kenji KUDO

(Received October 11, 1978)

I　結 果 の 紹 介

関数の孤立特異点を分類する立場には次の三通りがある。第一のは解析的な座標変換によって互いに移れるものを等しいと見る解析的立場である。第二のは解析的ではないが連続的な座標変換を考える位相的立場である。これらは共に関数の局所的な状況をすべて考慮に入れている。第三の立場は零点集合の位置関係を位相的に記述することである。明らかに第一の立場が一番狭く，第三の立場が一番広く，特異点の類を定義している。本論文の目的は位相同値類とMilnor数との関係について考察することとひとつの位相同値類が解析同値類にどの様に分れているかについて考察することにある。得られた結果は次の定理と系として与えられる。

定理１．自然数nは４以上とする。任意に自然数μを与えておく。その時，n次元複素空間$\mathbb{C}^n$の原点の近くで定義され，原点を孤立特異点に持ち，原点で零になる正則関数全体の集合E_nにおいて，Milnor数が与えられた数μである様な関数の作る部分集合の任意な連結成分は唯ひとつの位相同値類を定める。

系．上の定理の記号の下で，Milnor 数がμ以下である様なE_nの部分集合の定める位相同値類は有限個である。特に，E_nの位相同値類は丁度可算個ある。

定理２．自然数nは４以上とする。関数fはE_nの任意な元とする。その時，fの位相同値類の中で解析同値類の作る商空間はfの解析同値類の近くで解析的であり，その局所次元はfのmodalityに等しい。

ところで定理１の系はFukuda (1976) による定理と極めて似ていることに注意しよう。しかし，定理１の系は孤立特異点をもつものだけを考えているということにおいてFukudaの定理より弱いが，値の方の座標変換を考えなくてもよいということにおいてFukudaの定理より強い結果を与えているという相違がある。

さて，これらの結果の証明は第6節で与える。第2節から第5節まではそのための準備である。即ち，第2節では集合の芽，写像の芽及び孤立特異点の定義とそれらの簡単な性質を述べる。第3節では解析的集合と代数的集合の定義を与え，連結性についての諸命題を述べる。第4節では位相同値性の定義を与え，King の定理とLê and Ramanujam の定理を述べる。第5節では解析同値類についてのMather（1969）及びArnol'd（1972，1976）の結果を述べ，最後にGabrielov（1974）による modality の特徴付けを述べる。

II 孤立特異点

この節では，まず集合と写像の芽について述べる。これは本論文が正則関数の全体的挙動より特異点の付近での局所的挙動について関心を持っているからである。その次に，孤立特異点の定義とその解析的な特徴付けを述べる。

定義1．集合Xは位相空間とし，点PをXから任意に取り固定しておく。その時，Xの部分集合Y及びZが点Pにおいて同値であるとは

$$U \cap Y = U \cap Z$$

となる点Pの近傍Uが存在することを言う。この関係による部分集合Yの同値類のことを点PにおけるYの芽と呼び，記号

$$(Y, P)$$

で表わす。

定義2．位相空間Xの一点Pのある近傍で定義された位相空間Yへの連続写像f及びgが点Pにおいて同値であるとは，

$$f | U = g | U$$

となる点Pの近傍Uが存在することを言う。ここで，記号｜はUへの制限写像を考えていることを示す。この関係による連続写像fの同値類のことを点Pにおけるfの芽と言い，同じ記号fで表わしたり，芽

$$f : (X, P) \to Y$$

あるいは芽

$$f : (X, P) \to (Y, f(P))$$

と表わしたりする。

命題1. 芽 $f : (X, P) \to (Y, Q)$ に対して，点Pにおける集合の芽 $f^{-1}(Q)$ が一意的に定まる。またfが同相写像の芽ならばXの部分集合の芽（Z，P）に対して点Q＝f(P) における芽 f(P) における芽 f(Z) も一意的に定まる。

証明．写像 $f_1 : V_1 \to Y$ 及び写像 $f_2 : V_2 \to Y$ は芽 f を与える連続写像とする。ここで V_1，V_2 は点 P の近傍である。その時，点 P の近傍 U がとれて，任意な点 $x \in U$ に対して

$$f_1(x) = f_2(x)$$

が成り立つ。従って，$f_1^{-1}(Q) = \{ x \in V_1 \mid f_1(x) = Q \}$ と $f_2^{-1}(Q)$ は，等式

$$f_1^{-1}(Q) \cap U = f_2^{-1}(Q) \cap U$$

を満たす。故に $f_1^{-1}(Q)$ と $f_2^{-1}(Q)$ は点 P において同一の芽を定める。かくて，点 P における集合の芽 $f^{-1}(Q)$ が代表元の取り方に依らず一意的に定まる。

次に，上の写像 f_1，f_2 は $f_1(V_1)$ 及び $f_2(V_2)$ が Y の開集合となる様な中への同相写像とする。また X の部分集合 Z_1，Z_2 は芽 (Z, P) を与えるものとする。その時，点 P の近傍 U が取れて，任意な点 $x \in U$ に対して

$$f_1(x) = f_2(x)$$

かつ

$$Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$$

が成り立つ。従って，

$$f_1(Z_1) \cap f_1(U) = f_2(Z_2) \cap f_2(U)$$

が成り立つ。さて，$f_1(U)$ 及び $f_2(U)$ は点 Q の近傍になるので，上式は $f_1(Z_1)$ と $f_2(Z_2)$ が点 Q において同一の芽を定義することを示している。故に，点 Q における集合の芽 $f(Z)$ は代表元の取り方に依らず一意的に定まる。

定義 3.　正則関数の芽 $f : (\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}, 0)$ が n 次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の原点 O を特異点として持つとは，$\mathbb{C}^n$ の座標関数を x_1，x_2，……，x_n とする時，芽 f が

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(O) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(O) = \cdots\cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(O) = 0$$

を満たしていることを言う。この時，特異点 O が孤立しているとは，原点 O が $\mathbb{C}^n$ の部分空間

$$\left\{ P \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0 \right\}$$

の孤立点になっていることを言う。

原点 O を孤立特異点にもつ正則関数の芽 $f : (\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}, 0)$ 全体の作る集合を E_n で表わす。集合 E_n には帰納的位相を持った収束巾級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ の部分集合としての位相を入れておく。

次の命題は Hilbert の零点定理の局所解析的な翻訳であり，孤立特異点の解析的な特徴付けを与えている。その証明は，例えば，Abhyankar (1964) を見よ。

命題2.原点Oが正則関数の芽 $f:(\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}, 0)$ の孤立特異点である必要十分な条件は,ある自然数kに対して

$$\mathfrak{m} \supseteq j(f) \supseteq \mathfrak{m}^k$$

が成り立つことである。ここで $\mathfrak{m}$ は収束巾級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ の唯一の極大イデアルを表わし,$j(f)$ はfのヤコビアン・イデアル,即ち,n個の元

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

で生成された $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ のイデアルを表わしている。

Ⅲ 解析的集合と代数的集合

この節では解析的集合と代数的集合の定義を与える。次に,定理1とその系及び定理2の証明に必要となる,局所連結性の命題と代数的集合の連結成分の有限性についての命題を述べる。

定義4.n次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の部分集合Aが一点Pの近くで解析的であるとは,点Pの近傍Vと,V上で定義された有限個の正則関数 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_s$ が取れて

$$V \cap A = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots\cdots = f_s(x) = 0\}$$

となることを言う。この時,Vの任意な点Qに対しても集合AはQの近くで解析的であることに注意せよ。

定義5. n次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の部分集合Aが代数的であるとは,$\mathbb{C}^n$ 上で定義された有限個の多項式 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_s$ が取れて,

$$A = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots\cdots = f_s(x) = 0\}$$

となることを言う。代数的集合Aは $\mathbb{C}^n$ の任意な点Pにおいて解析的であることに注意せよ。

命題3. n次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の任意な代数的集合A,Bに対して,その差集合A−Bは高々有限個の連結成分をもつ。

この証明は,例えば,Milnor(1968)を見よ。次の命題はWhitney et Bruhat(1959)から容易に証明できる。

命題4. 集合Aは $\mathbb{C}^n$ の点Pにおいて解析的であり,点Pは集合A−{P}の閉包に含まれているとする。その時,点Pに十分近いA内の任意な点Qは,端点以外がA内にある区分的に滑らかな実曲線で点Pと結ばれる。

系5. $\mathbb{C}^n$ の代数的集合A,Bに対して,その差A−Bの連結成分に含まれる任意な2点P,Qは

区分的に滑らかな実曲線で結べることができる。

証明．2点P，Qを結ぶ連続な実曲線の存在についてはMilnor (1968)を見よ。その様な実曲線はコンパクトなので，命題4を有限回用いることによって，求める区分的に滑らかな実曲線の存在が言える。

定義6.　n次元複素空間$\mathbb{C}^n$の部分集合Aは点Pの近くで解析的であるとする。その時，点PにおけるAの局所次元がℓ以上であるとは，定義4における関数f_1，f_2，……，f_sに対して，点Pに収束するA内の点列$\{P_i\}$が取れて，各点P_iに対して，s個のベクトル

$$df_1(P_i),\ df_2(P_i),\ \cdots\cdots,\ df_s(P_i)$$

の多くとも$n-\ell$個が一次独立なことを言う。ここでベクトル$df_k(P_i)$とは，成分が

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(P_i),\frac{\partial f_k}{\partial x_2}(P_i),\ \cdots\cdots,\frac{\partial f_k}{\partial x_n}(P_i)\right)$$

である$\mathbb{C}^n$のベクトルのことを言う。なお，その様な点列$\{P_i\}$が取れない時，即ち点PがAの閉包に含まれていない時，Aの局所次元は-1であると定める。明らかなことであるが局所次元がℓであるとは，局所次元がℓ以上であって$\ell+1$以上でないことを言う。かくて点PがAの閉包に含まれるならば，Aの局所次元は0からnまでの整数値を取る。詳しくはWhitney (1972)を見よ。

Ⅳ　位相同値類

この節では正則関数の芽の位相同値性及び位相同型性を定義し，それらの関係をKingの定理として引用する。次にMilnor数と呼ばれる位相不変量を定義し，その量によって位相同型性がある程度決定されることを述べる。これはLê及びLê and Ramanujam (1976) の結果として引用されている。

定義7.　正則関数の芽$f, g : (\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}, 0)$が位相同値であるとは

$$g = f \circ h$$

となる同相写像の芽

$$h : (\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}^n, O)$$

が存在することを言う。

芽hが特に双正則写像の芽である時には，fとgは解析同値であると言う。なお同相写像fが双正則写像であるとは，f及びf^{-1}が共に正則写像であることを言う。

さて，孤立特異点を分類する第3の立場から次の定義を与えよう。

定義8.　芽f，gはE_nの元とする。それらの孤立特異点Oが同じ位相型をもつとは，原点Oにおけるそれらの零点集合の芽$f^{-1}(0)$と$g^{-1}(0)$に対して

$$h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$$

となる同相写像の芽

$$h : (\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}^n, O)$$

が存在することである。

最近King (1978) によって証明された次の命題は，芽が位相同値であることと特異点が同じ位相型を持つということがほとんど同値な条件であることを示している。この命題の証明には h－cobordism 定理を用いるので自然数 n に 4 以上という制限が付いている。

命題 6. 自然数 n は 4 以上とする。集合 E_n の元 f と g が位相同値であるための必要十分な条件 は次の 2 条件を満足することである。

① f と g の特異点Oは同じ位相型をもつ。

②芽 h を定義 8 におけるものとする時，芽 g と $f \circ h$ は $S^{2n-1} - g^{-1}(0)$ から $\mathbb{C} - \{0\}$ への写像としてホモトピックである。ここで S^{2n-1} は原点Oを中心とする半径が十分小さい $\mathbb{C}^n$ の球面を表わしている。

定義 9. 正則関数の芽 $f : (\mathbb{C}^n, O) \to (\mathbb{C}, 0)$ に対して，

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\} / j(f)$$

を f のMilnor 数と呼ぶ。ここで記号 $\dim_{\mathbb{C}}$ は複素ベクトル空間としての次元を取ることを示している。数 $\mu(f)$ は非負整数及び正の無限大をその値として取る。命題 2 から，芽 f が E_n の元である必要十分な条件は $\mu(f)$ が自然数値を取ることである。

以下の命題によってMilnor 数は位相同値性及び位相同型性を考える場合に重要な数であることがわかる。まず，命題 7 はMilnor 数が位相不変量であることを示している。これはLê (1973－74) によって示された。次に，命題 8 は命題 7 の弱い形の逆を与えている。これはLê and Ramanujam (1976) によって，h－cobordism定理を用いて証明された。

命題 7. 芽 f が E_n の元なら，Milnor 数 $\mu(f)$ は f の特異点Oの位相型にしか依らない。

命題 8. 自然数 n は 4 以上とする。集合 E_n の元からなる区分的に滑らかな実 1 パラメーター族 $\{f_t\}$ を考える。但し t は区間 $[0, 1]$ を動くとする。その時，もし芽 f_t のMilnor 数 $\mu(f_t)$ が t に依らない定数なら，各 t に対して，

$$h_t(f_0^{-1}(0)) = f_t^{-1}(0) \quad \text{かつ} \quad h_0 = 1_{\mathbb{C}^n}$$

となる $(\mathbb{C}^n, O)$ の同相写像の芽の 1 パラメーター族 $\{h_t\}$ が存在する。ここで記号 $1_{\mathbb{C}^n}$ は $\mathbb{C}^n$ の恒等写像の原点Oでの芽を表わしている。

最後に，定理 1 と 2 の証明に必要な事実を命題 6 と命題 8 の系として述べておく。

系9.　命題8における族 $\{f_t\}$ を考える。その時，f_0 と f_1 は位相同値である。

証明．命題6と8から，芽 f_0 と $f_1 \circ h_1$ が $S^{2n-1}-f_0^{-1}(0)$ から $\mathbb{C}-\{0\}$ への写像の芽としてホモトピックなことを言えば系9は証明されたことになる。しかし，求めるホモトピー $F(x, t)$ は命題8の $\{h_t\}$ を用いて

$$F(x, t)=f_t \circ h_t(x)$$

で与えられる。

V　解　析　同　値　類

この節では解析同値類について述べる。まず孤立特異点をもつ正則関数芽は多項式に解析同値なことを言う。これにより，解析同値類は高々連続体濃度だけあることがわかる。次にmodality の定義をし，Arnol'd (1972, 1976)によって与えられた特異点の正規形をいくつか例としてあげる。その中にはmodality 1の正規形があるので，解析同値類は丁度連続体濃度だけあることがわかる。これは位相同値類が可算個しかないということに比べると明らかな相違を示している。最後に，解析同値類は群の作用の下での軌道であることを述べ，その接空間と横断面について述べる。これによって，Gabrielov (1974)によるmodalityの特徴付けを述べることができる。

命題10.　芽 f は E_n の元とする。そのとき，f は十分高い次数のその Taylor 多項式に解析同値である。

この命題はMather(1969) によって証明された。なお k 次Taylor 多項式とは正則関数を巾級数展開した時 $k+1$ 次以上の項を無視して得られる多項式のことである。

定義10.　集合 E_n の元 f のmodalityが ℓ 以下であるとは，次の様な性質をもつ有限個の複素解析的な ℓ パラメーター族

$$F_1, F_2, \cdots\cdots, F_s : (\mathbb{C}^n, 0)\times\mathbb{C}^{\ell} \to (\mathbb{C}, 0)$$

が存在することである。その性質とは，

①各 $i=1, 2, \cdots, s$ に対して

$$F_i(x, 0)=f(x)$$

②芽 f に十分近い任意の芽 g は，適当な添数 i と定数 c に対して，芽 $F_i(x, c)$ と解析同値である。

さて，modalityが ℓ 以下であって，$\ell-1$ 以下でない時に，それは ℓ に等しいと言い，記号では $m(f)=\ell$ と書くことにする。

孤立特異点の解析同値類の分類及び正規形を与える問題はArnol'd(1972, 1976) によって取り組まれている。彼はこの問題をmodalityの小さい順に解決しているが，まだmodalityが3以下までのものしか分類できていない。

例．解析同値類の Arnol'd（1972，1976）による正規形

①m(f) = 0なる孤立特異点は次の正規形のどれか唯一つと解析同値である。

$$A_k : \quad f(x) = x_1^{k+1} + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \qquad (k \geqq 1)$$
$$D_k : \quad f(x) = x_1^2 x_2 + x_2^{k-1} + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \qquad (k \geqq 4)$$
$$E_6 : \quad f(x) = x_1^3 + x_2^4 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$$
$$E_7 : \quad f(x) = x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$$
$$E_8 : \quad f(x) = x_1^3 + x_2^5 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$$

②m(f) = 1なる孤立特異点の正規形には次のものがある。

$$J : \quad f(x) = x_1^3 + x_2^6 + a\, x_1^2 x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$$
$$T : \quad f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + a x_1 x_2 x_3 + x_4^2 + \cdots + x_n^2$$

ここでJ及びTの類の，絶対値が十分小さい異なるaに対する2元は互いに解析同値にならない

次に，解析同値類の局所的な性質について考察しよう。まず，解析同値類の定義から，その同値類は次の様に表現することができる。双正則写像の芽

$$h : (\mathbb{C}^n, O) \rightarrow (\mathbb{C}^n, O)$$

全体の集合は，写像の合成を群演算として，群を作る。この群 $I(\mathbb{C}^n)$ は複素リー群であることが知られている。そして，群 $I(\mathbb{C}^n)$ は複素ベクトル空間 m^2 の開集合 E_n に，演算

$$(h, f) \rightarrow f \circ h$$

によって作用している。ここで f は E_n の元であり，h は $I(\mathbb{C}^n)$ の元である。この作用による f の軌道が f の解析同値類になっている。この軌道の性質は Mather (1969) によって調べられている。

命題11. 上の作用による芽 f の軌道の f における接空間は
$$m \cdot j(f)$$
で与えられる。

この命題の系を与えるためには次の定義をしなければならない。

定義11. 文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の単項式 $a_1(x), a_2(x), \cdots a_s(x)$ がベクトル空間

$$Q_f = m^2 \cdot \mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \big/ m \cdot j(f)$$

の単項式基底であるとは，Q_f におけるそれらの像が Q_f の基底になっていることを言う。

系12. 上の作用による芽 f の軌道に対する f における横断面は

$$T_f = \{ g \in E_n \mid g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} c_i a_i(x) \}$$

で与えられる。ここで $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_s(x)$ は Q_f の単項式基底であり，c_i は絶対値が十分小な複素数を動く任意定数である。

特に，f のMilnor数を μ とすると T_f は $\mathbb{C}^{\mu-1}$ の開集合と同一視される。即ち，$s=\mu-1$ である。

証明．空間 Q_f は f の解析同値類の接空間の補空間を定めるのでは，T_f は求める横断面になる。次元については，等式

$$\dim \mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots x_n\}/m^2 + \dim m^2/m \cdot j(f) = \dim \mathbb{C}\{x_1, x_2 \cdots, x_n\}/j(f) + \dim j(f)/m \cdot j(f)$$

とMilnor数の定義からすぐ出る。

なお，定数 c_i に絶対値の制限を付けたのは，T_f が E_n に含まれている様にするためのものである。集合 E_n は空間 m^2 の開集合なので，このことは可能である。

さて，第5節を終えるにあたって次の命題を述べることにする。これはGabrielovの定理を横断面に関しての命題に言い換えたものであり，定理2の証明の重要な部分になっている。この証明は，Gabrielovの定理及びGabrielov (1974) によるその証明中にでてくる写像 τ の形と，それがproperであるということから容易にできる。

命題13. 芽 f は E_n の元とする。その時，f のmodalityは，f において解析的な集合

$$\{g \in T_f \mid \mu(g)=\mu(f)\}$$

の f での局所次元に等しい。ここで T_f は系12で与えられた f での横断面を表わし，$\mu(f)$ は f のMilnor数を表わしている。

Ⅵ　定理の証明

まず定理1とその系について考えよう。それらは次の様にして証明される。

補題1. 芽 f は E_n の元とし，f のMilnor数は μ とする。その時

$$j(f) \supseteq m^{\mu}$$

である。

証明．そうでないとすると $j(f) \not\supseteq m^k$ が μ 以下の任意な自然数 k に対して成立する。命題2を考慮すると，これは $j(f)+m^{k+1} \not\supseteq m^k$ と同値である。故に，μ 以下の k に対して

$$a_k \in m^k \setminus \{j(f)+m^{k+1}\}$$

となる巾級数 a_k が取れる。しかも，取り方から，$1, a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ の $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots x_n\}/j(f)$ への像は一次独立である。これは

$$\dim \mathbb{C}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}/j(f)=\mu$$

に反する。

補題2. 自然数μを任意に与えておく。集合AはMilnor数がμとなるE_nの元の作る部分集合とする。さて，Aの元fに対して，その$\mu+1$次Taylor多項式$T_{\mu+1}f$を考える。簡単のためこれをgで表わす。その時，gはAに含まれている。より強く，gはfと同じAの連結成分にある。更に，fとgは位相同値である。

証明．芽の実1パラメーター族$\{f_t\}$を次の式で定義する。

$$f_t(x)=f(x)+t\cdot(g(x)-f(x)),\quad 0\leqq t\leqq 1$$

さて，gはfの$\mu+1$次Taylor多項式なので$g-f$は$m^{\mu+2}$の元である。従って，補題1から，$i=1,2,\cdots,n$に対して

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}\in m^{\mu+1}\subseteqq m\cdot j(f)$$

がわかる。故に，

$$j(f_t)\subseteqq j(f)\subseteqq j(f_t)+m\cdot j(f)$$

が成り立つ。かくて，中山の補題から

$$j(f_t)=j(f)$$

がわかる。特にf_tのMilnor数はtに依らずμに等しい。故に各f_tはE_nの元であり，更にAの元であることもわかった。また，系9から$f_0=f$と$f_1=g$とは位相同値であることもわかる。なお，中山の補題とその証明については，例えば，Mather(1969)を見よ。

さて，Milnor数がμとなる$\mu+1$次以下の多項式の芽全体が作るE_nの部分集合をBで表わす時，補題2によって，定理1とその系を証明するには，集合Bの連結成分が有限個であり，その各々の成分がそれぞれただひとつの位相同値類を定めることを示せば十分である。所で，集合Bは次の集合C及びD

$$C=\{g \mid \mu(g)\geqq\mu,\ g\text{は}\mu+1\text{次以下の多項式で}g(0)=0\}$$

$$D=\{g \mid \mu(g)\geqq\mu+1,\ g\text{は}\mu+1\text{次以下の多項式で}g(0)=0\}$$

の差集合$C\setminus D$である。不等式$\mu(g)\geqq k$は有限個の行列式が零となるという条件に書き直すことができるので，集合C及びDは，定数項が零となる$\mu+1$次以下の多項式全体の作る複素空間内の代数的集合である。従って，命題3と系5より，集合Bの連結成分の個数は有限個であり，各連結成分内の2元fとgはB内の区分的に滑らかな曲線で結ばれる。従って，系9よりfとgは位相同値である。これで定理1とその系の証明が終った。

次に定理2の証明に移ろう。そのため，〔f〕で芽fの位相同値類を表わすことにする。第5節で述べた様に解析同値類は複素リー群$I(\mathbb{C}^n)$の軌道であるので，〔f〕における解析同値類の集合は局所的に系12で与えられた横断面T_fと〔f〕の交わり$T_f\cap$〔f〕と同一視されることが次元の関係からわかる。従って，定理2は次の様に言い直すことができる。

定理2（その2）．自然数nは4以上とし，芽fはE_nの元とする。その時，集合$T_f \cap [f]$はfのはfの近くで解析的であり，fにおける$T_f \cap [f]$の局所次元はfのmodalityに等しい。

さて，この定理を証明するには，命題13から次の主張を示せば十分なことがわかる。

主張：集合$T_f \cap [f]$及び集合$\{g \in T_f \mid \mu(g) = \mu(f)\}$のfにおける芽は互いに相等しい。

証明．まず芽gを$T_f \cap [f]$から取る。その時gとfは位相同値なので，命題6からfとgの特異点0は同じ位相型をもつ。故に命題7からgとfのMilnor数は等しい。

逆に，gが$\mu(g) = \mu(f)$をみたすfに十分近い芽なら，集合$\{g \in T_f \mid \mu(g) = \mu(f)\}$はfにおいて解析的なので，命題4から$E_n$における区分的に滑らかな実1パラメーター族$\{f_t\}$が

$$\mu(f_t) = \mu(f),\ f_0 = f,\ f_1 = g$$

となる様に取れる。その時，系9によって，$f_0 = f$と$f_1 = g$は位相同値なことがわかる。

以上から主張が証明され，従って定理2が証明されたことになる。

最後に，定理2の簡単な系を述べて本論文を終えることにする。

系．芽fはE_nの元とし，そのmodalityは零であるとする。その時，fの位相同値類のfを含む連結成分はfの解析同値類と一致する。特に，modalityが零となるE_nの元の位相同値類はArnol'dによって与えられた正規形A_k, D_k，E_6，E_7，E_8で代表されている。

証明．複素リー群$I(\mathbb{C}^n)$は連結なので，fの解析同値類は連結集合である。従って，それが$[f]$で開かつ閉な集合であることを示せば十分である。開なことはfのmodalityが零であるということから出る。一方，閉なことは$[f]$の解析同値類のなす商空間の局所次元が零であるということから出る。他の主張は，このことから明らかである。

引用文献

ABHYANKAR, S.S. 1964. *Local analytic geometry.* 484 pp. Academic Press, New York and London.

ARNOL'D V. I. 1972. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. *Ftl A. A.*, **6**: 254—272.

ARNOL'D, V. I. 1976. Local normal forms of functions. *Inv. math.*, **35**: 87—109.

FUKUDA, T. 1976. Types topologiques des polynômes. *IHES*, **46**: 87—106.

GABRIELOV, A. M. 1974. Bifurcations, Dynkin diagrams, and modality of isolated singularities. *Ftl. A. A.*, **8**: 94—98.

KING, H. C. 1978. Topological type of isolated critical points. *Annals of Math.*, **107**: 385—397.

LÊ DŨNG TRÁNG. 1973−74. Topologie des singularités des hypersurfaces complexes. *Astérisque*. **7／8** : 171−182.

LÊ DŨNG TRANG and C. P. RAMANUJAM. 1976. The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. *Amer. J. of Math.*, **98** : 67−78.

MATHER, J. 1969. Stability of C^{∞}−mappings. III. *IHES*, **35** : 127−156.

MILNOR, J. 1968. *Singular points of complex hypersurfaces*. 122 pp. Princeton U. P., Princeton.

WHITNEY, H. 1972. *Complex analytic varieties*. 399pp. ddison−Wesley, Massachusetts.

WHITNEY, H. et F. BRUHAT. 1959. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques−réels. *Comm. M. Helv.*, **33** : 132−160.