

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 11 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400187

研究課題名(和文) 正則グラフの $\{a,b\}$ -因子研究課題名(英文) $\{a,b\}$ -factors of regular graphs

研究代表者

加納 幹雄 (Kano, Mikio)

茨城大学・理工学研究科・名誉教授

研究者番号：20099823

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)： a と b と r は $a+b=r$ 、 $a \leq r/2$ を満たす正の整数とする。課題は r が奇数のときに、予想「 r -正則グラフには $\{a,b\}$ -因子が存在する」ことを示すことである。同時に関連するグラフ理論の問題に貢献することである。これに対して、もし a が偶数で $2 \leq a \leq r/2$ ならこの予想が成り立つことを示した。また、もし a が奇数で $r/3 \leq a \leq r/2$ なら予想が成り立つことを示した。最近もし a が奇数で $(a+1)(a+2) \leq r$ なら予想が成り立たないことが示された。しかし未解決な場合が残っている。また関連する2部グラフの因子、一般のグラフの因子およびグラフの全域木についてもいくつかの結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Let a , b and r be positive integers such that $a+b=r$ and $a \leq r/2$. We want to prove the following conjecture: If r is odd, then every r -regular graph has an $\{a,b\}$ -factor. We showed that if either a is even or a is odd and $r/3 \leq a \leq r/2$, then the conjecture holds. On the other, it was recently shown that the conjecture does not hold if $(a+1)(a+2) \leq r$. However there are unsolved cases. We also obtained some results on factors of graphs and spanning trees of graph, which are related to the above conjecture.

研究分野：離散数学

キーワード：離散数学 グラフ理論 グラフの因子 正則グラフ 全域木

1. 研究開始当初の背景

2つの正の整数 a と b に対して、各点の次数が a または b となる全域部分グラフを $\{a, b\}$ -因子という。もし $a \geq 3$ b なら $\{a, b\}$ -因子の存在問題は NP 完全問題であり、 $\{a, b\}$ -因子が存在するための必要十分条件はなく、また $\{a, b\}$ -因子に関する結果もほとんどなかった。一方、別の問題から 5-正則グラフに $\{1, 4\}$ -因子があることが期待された。これを一般化して著者たちは「もし r が奇数で $r=a+b$ なら r -正則グラフには $\{a, b\}$ -因子が存在する」という予想を提案した。これを解決するのが動機であり、直接的な背景である。

2. 研究の目的

上で述べた予想「もし r が奇数で $r=a+b$ なら r -正則グラフには $\{a, b\}$ -因子が存在する」という Akbari-Kano 予想を解決することが第一の目的である。また、これに関連する他のグラフの因子とか、全域木についても研究をすることも目的である。グラフの因子理論は単独の問題を解くというより、関連する多くの因子や全域木などとの関係があり、このような枠組みで研究を行う必要がある。

3. 研究方法

特殊な場合をコンピュータを用いてしらみつぶしに調べたり、多くの特殊な例について調べることも含めて、多方面から研究を進めていく。グラフの因子理論には精通しているが、予想が従来からの方法で解決できるかどうかは不明である。しかし、研究を進めていけば、少なくとも関連する結果はいくつか得られると考えている。

4. 研究成果

(1) コンピュータを用いてループとか多重辺を含む 5-正則なグラフを大量に生成してそれに $\{1, 4\}$ -因子があるかを調べたが、反例はみつけれなかった。一方、一般の場合には次のような結果を得た。もし a が偶数で $2 \leq a \leq r/2$ ならこの予想は成り立つ。また、もし a が奇数で $r/3 \leq a \leq r/2$ なら予想が成り立つ []。しかし、最近 Axenovich と Rollin により、 a が奇数で $(a+1)(a+2) \leq r$ なら予想が成り立たないことが示された []。

(2) 上の結果からは未解決な場合が無数に残っている。例えば、 $r=5, a=1, b=4$ は予想が成り立つかどうか未解決な最小な場合であり、これについて研究をした。そして、いくつかの部分的な結果を得た。例えば、予想が成り立てば、ある 2 部グラフには特殊な因子が存在することになるが、そのような因子は存在することを確認した。同時にこれの拡張も現在進めている。この他関連するグラフの別の因子についていくつかの結果を得た [他]。

(3) グラフの因子はグラフの全域木とも関係があり、全域木についても同時に研究をし、いくつかの結果を得た。主なものは、茎がある条件を満たすような全域木の存在条件などを求めた [他]。

<引用文献>

S. Akbari and M. Kano,
 $\{k, r-k\}$ -factors of r -regular graphs,
Graphs and Combinatorics, 30 (2014)
821-826

M. Axenovich and J. Rollin, Brooks type

results for conflict-free colorings and $\{a,b\}$ -factors in graphs, Discrete Mathematics, Vol.338 (2015) 2295-2301.

Y. Egawa, M. Kano and Z. Yan, $(1,f)$ -factors of graphs with odd property, Graphs and Combinatorics, Vol.32, (2016) 103-110.

M. Kano and Z. Yan, Spanning trees with bounded degrees and leaves, Discrete Mathematics, 339 (2016) 1583-1586.

5 . 主な発表論文

[雑誌論文] (計14件)

Y. Egawa, M. Kano and Z. Yan, $(1,f)$ -factors of graphs with odd property, Graphs and Combinatorics, Vol.32, (2016) 103-110. 査読あり

DOI :10.1007/s00373-015-1558-x

M. Kano, K. Ozeki, M. Tsugaki and G. Yan, m -dominating k -trees of graphs, Discrete Mathematics, Vol.339 (2016) 729-736. 査読あり

doi:10.1016/j.disc.2015.10.013

M. Kano and Z. Yan, Spanning trees with bounded degrees and leaves, Discrete Mathematics, 339 (2016) 1583-1586. 査読あり

doi:10.1016/j.disc.2015.12.023

S. Bereg, F. Hurtado, M. Kano, 他6名, Balanced partitions of 3-colored geometric sets in the plane, Discrete Applied Math. Vol. 181 (2015) 21-32. 査読あり

doi:10.1016/j.dam.2014.10.015

M. Kano, K. Ozeki, K. Suzuki, M. Tsugaki

and T. Yamashita, Spanning k -trees of bipartite graphs, Electronic Journal of Combinatorics, Vo.22 (2015) P1.13 査読あり

<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/issue/view/Volume22-1>

M. Kano and Z. Yan, Spanning trees whose stems are spiders, Graphs and Combinatorics, Vol. 31 (2015) 1883-1887. 査読あり

DOI:10.1007/s00373-015-1618-2

S. Akbari and M. Kano, $\{k,r-k\}$ -Factors of r -Regular Graphs, Graphs and Combinatorics, Vol.30 (2014) 821-826. 査読あり

DOI:10.1007/s00373-013-1324-x

M. Kano, M. Tsugaki and G. Yan, m -dominating k -ended trees of graphs, Discrete Math. Vol.333 (2014) 1-5 査読あり

DOI:10.1016/j.disc.2014.06.005

M. Kano and Z. Yan, Spanning trees whose stems have at most k leaves, ARS Combinatoria, Vol.117 (2014) 417-424. 査読あり

<http://www.combinatorialmath.ca/arscombinatoria/>

M. Kano and A. Kyaw, A note on leaf-constrained spanning trees in a graph, Ars Combinatoria, Vol.108 (2013) 321--326. 査読あり

<http://www.combinatorialmath.ca/arscombinatoria/>

M. Kano, H. Matsuda, M. Tsugaki and G. Yan, Spanning k -ended trees of bipartite graphs, Discrete Mathematics, Vol.313

(2013) 2903--2907. 査読あり
doi.org/10.1016/j.disc.2013.09.002
S. Akbari, M. Kano and S. Zare, A
generalization of 0-sum flows in graphs.
Linear Algebra Appl. Vol.438 (2013),
3629--3634. 査読あり
doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.005
M. Uno and M. Kano, Visual Cryptography
scheme for two parties, International
Journal of Information Science and
Computer Mathematics, Vol.7, (2013)
35-64. 査読あり
http://www.pphmj.com/journals/ijiscm
.htm
Y. Egawa, M. Kano and Z. Yan, Star-
Cycle Factors of Graphs, Discussiones
Mathematicae. Graph Theory, Vol.34
(2014) 193-198. 査読あり
doi:10.7151/dmgt.1717

[学会発表] (計16件)

加納幹雄, J.Bout 「平面格子上の赤点と
青点の重さ平衡分割」第12回組合せ論若
手研究集会、横浜市、慶応義塾大学
2016年2月24日~25日
招待講演 M.Kano, 「Some current results
on spanning trees」 Symposium on Graph
Theory and Applications (SGTA 2016),
Manila, Philippines
2016年1月13日~15日
加納幹雄, Abrego, Orden, 他5名 「位数
4の星グラフによる無交差な幾何的交互
被覆」第27回位相幾何学的グラフ理論研
究集会、横浜市、横浜国立大学、
2015年11月13日~14日
加納幹雄, R. Cymer, 「2部グラフの因

子」離散数学とその応用研究集会 2015、
熊本市、熊本大学
2015年8月22日~24日
M.Kano, 「Discrete geometry on 3 colored
point sets in the plane」 XVI Spanish
Meeting on Computational Geometry,
Barcelona, Spain,
2015年6月1日~3日
加納幹雄, J. Kyncl, 「平面上の3色点集
合の分割に関するある定理」第11回組合
せ論若手研究集会、横浜市、慶応義塾大
学
2015年3月4日~5日
招待講演 M.Kano, 「Two topics on factors
of graphs」 The first Sino-Japan
Symposium on Graph Theory,
Combinatorics and their Applications,
北京 中国 科学院
2014年10月29日-11月1日
H. Ito, M.Kano, K. Sekimoto, 「OR-Game
of Nim-type Games」 The 17th Japan
Conference on Discrete and
Computational Geometry and Graphs
2014、東京、東京理科大学、2014年9月
15日~16日
加納幹雄, 津垣正男, G. Yan,
「m-dominating k-ended trees of graphs」
離散数学とその応用研究集会 2014, 新
潟市
2014年8月20日-22日
招待講演 M.Kano, 「Spanning Trees with
Specified Stems」 International
Conference on Discrete Mathematics and
Applied Sciences, Bangkok, Thailand.
2014年5月21日-23日
M.Kano, J.Bout 「Weight-Equitable

Subdivision of Red and Blue Points in the Plane」Mexican Conference on Discrete Mathematics and Computational Geometry Honoring Jorge Urrutia on the occasion of his 60th birthday, Mexico, Oaxaca

2013年11月10日～14日

M.Kano, J. Bout 「Subdivision of Weighted Red and Blue Points in the Plane」The 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCG2 2013), 東京、東京理解大学

2013年9月17日～19日

M.Kano, Z. Yan, 「Spanning trees with k-ended stems」Graph Theory Conference in honor of Yoshimi Egawa on the occasion of his 60th birthday, 東京、東京理科大学

2013年9月10日～14日

加納幹雄、Bereg, Hurtado, 他5名「平面上の3色点集合のある定理」離散数学とその応用研究集会2013, 山形市,

2013年8月8日～10日

M.Kano, 「Spanning trees with specified stems」The 5th International Symposium on Graph Theory and Combinatorial Algorithms (GTCA2013), 中国 内蒙古民族大 2013年7月12日～14日

招待講演 M.Kano, 「Discrete geometry on 3 colored point sets in the plane」Designs, Codes, Graphs and Related Areas, 京都, 京都大学, 2013年7月1日～3日

加納幹雄、森北出版、例題と演習でわかる離散数学、2013年 184

[産業財産権] 0件

[その他]

ホームページと等

<http://gorogoro.cis.ibaraki.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加納 幹雄 (KANO, Mikio)

茨城大学工学研究科 名誉教授

研究者番号 20099823

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者

津垣 正男 (TSUGAKI, Masao)

[図書] (計1件)