

平成30年6月4日現在

機関番号：12101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17716

研究課題名(和文)非ユークリッド的グラフにおける確率モデルの多重相転移

研究課題名(英文)multiple phase transition of probabilistic models on non-Euclidean graphs

研究代表者

長谷川 雄央 (Hasegawa, Takehisa)

茨城大学・理学部・准教授

研究者番号：10528425

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：非ユークリッド的グラフ(複雑ネットワーク、nonamenable graph)上に配置された数理モデルは、しばしば(ユークリッド格子系では見られない)新規の相転移を示すことが知られる。本研究では以下のトピックを明らかにし、ネットワークの構造とその上のダイナミクスに関する知見を深めることができた：(1) ボンドパーコレーションにおける臨界相の統計的性質、(2) 階層ネットワーク上のサイトパーコレーションにおける秩序相の消失、(3) コンタクトプロセスが示す非平衡多重相転移の特徴、(4) 感染症モデルダイナミクスにおける初期状態の影響。

研究成果の概要(英文)：It is known that mathematical models placed on non-Euclidean graphs, e.g. complex networks and nonamenable graphs, often exhibit novel phase transitions, which are never observed in Euclidean systems. In order to unveil the relationship between the structure of networks and phase transitions thereon, we investigated the following topics: (1) the statistical properties of the critical phase for bond percolation (in tree), (2) the origin of the absence of the ordered state for site percolation in hierarchical networks, (3) the characterization of the nonequilibrium multiple phase transitions for the contact process (in tree and Farey graph), and (4) the effect of the initial condition on the phase transitions of the infectious disease models in complex networks.

研究分野：統計物理

キーワード：複雑ネットワーク ネットワーク科学 格子確率モデル パーコレーション 感染症モデル 相転移  
臨界現象

## 1. 研究開始当初の背景

複雑ネットワークとは、WWW、人間関係、航空網などに代表される、巨大で複雑なつながりを持つネットワーク(グラフ)の総称である。90年代末以降複雑ネットワークの研究が盛んに行われ、スケールフリー性、スモールワールド性といった、現実のネットワークが普遍的に有する特徴が明らかにされてきた。それらの特徴を再現するようなネットワークの数学モデルも数多く提案されてきた。

本研究課題の研究対象は、様々な複雑ネットワークモデル上に配置された格子確率モデルが示す新奇の相転移である。複雑ネットワーク上の格子確率モデルは、様々な現実現象(ネットワークの故障、感染症や情報の伝播、意見の形成)のモデルとして、これまで盛んに研究されてきた。その多数の構成要素からなる系のダイナミクスの記述には、統計物理理論が用いられる。従来の統計物理理論では、主にユークリッド格子を前提としている。一方、複雑ネットワークはユークリッド格子と異なり、ランダムで非一様なつながりを持つ。それゆえ、複雑ネットワーク上の格子確率モデルは、ユークリッド格子系には見られない、異常な振る舞いを示すことがしばしば報告されてきた。例えば本研究課題が主として扱う「臨界相を伴う多重相転移」は、非ユークリッド的グラフ特有の相転移であることが知られる。非ユークリッド的グラフ上の相転移の包括的な理解はまだ得られていないのが現状である。

## 2. 研究の目的

上記の背景を踏まえ、本研究は、グラフの幾何的性質と相転移現象の間にある法則を見つけ、非ユークリッド的グラフ特有の相転移を定性的に理解することを目的とした。具体的には、以下の3つの課題の解決を目指した:

(1) 多重相転移における臨界相の物理的性質に関しては、最も単純な格子確率モデルであるボンドパーコレーションでさえ、十分にはわかっていない。パーコレーションが示す多重相転移の特性とネットワーク構造の関係を理解するために、単純な非ユークリッド的グラフを用い、臨界相の統計的性質を詳細に明らかにする必要がある。

(2) 非ユークリッド的グラフでは、サイトパーコレーションとボンドパーコレーションで定性的な振る舞いが異なる: 階層的なネットワークでは、ボンドパーコレーションの結果によらず、サイトパーコレーションでは秩序相が存在しないという結果が得られる。このユニバーサルリティクラスの破れの原因はわかっていない。秩序相を持たない階層ネットワークが一般に含んでいるグラフ生成の

規則を見出し、秩序相が消えるグラフの構造的な性質を明らかにする必要がある。

(3) パーコレーションやスピン系が多重相転移を示すのと同様に、非ユークリッド的グラフ上に非平衡相転移を示す格子確率モデルを配置すれば、非平衡多重相転移が起きることが考えられる。しかし、非平衡多重相転移についての物理の見解はほとんどなく、非平衡多重相転移を扱う手法や指標もない。非平衡多重相転移を解析する手法を開発しつつ、非平衡多重相転移の物理描像を明らかにする必要がある。

## 3. 研究の方法

上記の課題の解決のため、それぞれの問題に適した格子確率モデルを調べる。扱ったのは、単純な確率過程であるパーコレーション、感染症の基本モデルとして知られるsusceptible-infected-removed (SIR)モデルとsusceptible-infected-susceptible (SIS)モデル(コンタクトプロセス)、およびその拡張モデルである。ネットワークもまた問題に依りて、適したものをを用いた。主な解析手法として母関数解析、平均場近似、近似マスター方程式を用い、モンテカルロシミュレーションによる数値実験も並行して行った。

なお、多重相転移を調べるとともに、ネットワークとその上のダイナミクスの関係の理解の助けとなる研究を適宜行った。特に、ネットワーク上の感染症モデルにおける初期状態の影響に関しては多くを調べた。従来の感染症モデル研究ではあまり考慮されていなかったものの、ネットワーク上の感染症モデルの関係を数値シミュレーションによって調べる際、初期状態が系のダイナミクスを根本的に変えうることが判明したためである。

## 4. 研究成果

本研究で得られた成果は以下の通りである:

(1) 多重相転移を示す最も単純なグラフであるツリー上のパーコレーションを調べた。無限ツリー上のパーコレーションと有限ツリー(の無限極限)上のパーコレーションのそれぞれについて、母関数による解析を行い、二種類の無限グラフにおける相転移の違いと対応関係を明らかにした。さらに、臨界相を示す後者に関して、臨界相中の連結成分の分布関数を解析し、多重相転移について一般に期待される統計的性質を明らかにすることができた【論文、学会発表】。

(2) 階層ネットワークの生成ルールと生成ルール次第で満たされるネットワークの性質について考察し、「階層ネットワークの生成ルールで決まる行列が特定の性質を満た

す場合、サイトパーコレーションで生成される最大連結成分は決して頂点数のオーダーにはならない、つまり秩序相は消失する」ことを見出した。この発見により、階層ネットワークのサイトパーコレーションにおける秩序相の消失について定性的な理解を与えることができた【学会発表 Ⅰ】。

(3) クラスタ性をできる限り高くしたネットワークのパーコレーションは二段階相転移を示すことが最近報告された [P. Colomer-de-Simón, M. Boguñá; PRX; 2014]。本研究課題との関わりから、この現象について独自に数値実験を行った。数値実験の結果、生成されたネットワークでは、次数の低い頂点からなるサブグラフがグラフのハブ（高次数の頂点）から離れたところで形成されていること、そしてそれが相転移の唯一性を失わせている可能性を明らかにした。対象のネットワークは多重相転移を示す系ではなかったものの、「なぜ二段階転移であり、多重相転移（無限段階転移に相当する）ではないのか？」という点で、考察に値する事例を提供するものである【学会発表 Ⅰ】。

(4) 非平衡相転移を示すモデルにおける臨界相を議論するため、パーコレーションで臨界相を示すことがすでに明らかとなっているネットワーク（ツリー、Farey graph）を用いて、その上で SIS モデルの数値シミュレーションを行った。数値シミュレーションでは、パーコレーションの臨界相を評価する際に使うフラクタル指数の考えに基づき、臨界相の有無を判定する指標を提案、計測した。過渡ダイナミクスではスピン模型に見られるようなロバストな臨界性は見られなかったものの、恒常感染源を用いた定常状態の解析を通じて臨界相を確認することができた【学会発表 Ⅰ】。

(5) ネットワーク上の感染症モデルにおける初期状態の影響を明らかにするため、レギュラーランダムネットワーク上の感染症モデルについてマスター方程式及び母関数を使った解析と数値シミュレーションの双方を行い、その相転移を調べた。SIR モデルの場合、有限割合の感染源を初期状態とすると、（従来の感染症モデル研究が想定していた）単一感染源では見られない、感染頂点からなる連結成分（感染クラスター）のパーコレーション転移が新たに起こることを明らかにした【論文、学会発表 Ⅰ】。さらに、SIR モデルをより複雑にした susceptible-weakened-infected-removed モデルでも同様の問題を扱った。初期感染源割合がある程度小さい場合、このモデルはある感染率で不連続転移を起こす。有限割合の感染源を初期状態とすると、不連続転移とは別に、感染クラスターのパーコレーション転移が起こっていることを発見した【論文、学会発表 Ⅰ】。

さらなる補足研究として、ネットワーク上の susceptible-weakened-infected-susceptible モデルにおける初期状態の影響も調べた。このモデルが不連続転移を示すこと、ただし定常状態に到達できるかどうかの点で初期状態に大きく依存することを微分方程式の解析と数値実験の双方から明らかにした【学会発表 Ⅰ】。

(6) ネットワークの構造とその上のダイナミクスの関係について知見を得るため、次の2つの補助研究を行った。(i) ランダムウォークモデルの通過経路で重み付けたネットワークの構造がどのようになるかを調べた。特に、近年提案された link salience [D. Grady, C. Thiemann, D. Brockmann; Nature Comm.; 2012]に着目し、実データで発見された link salience 分布の bimodal 性の起源を数理モデルによって調査した【学会発表 Ⅰ】。

(ii) サイトパーコレーションにおいて選ばれる頂点に隣接している頂点に注目し、そのような隣接頂点のみからなる頂点集合が巨大連結成分を持ちうるかについて調べた。複雑ネットワークでは、そのような頂点集合もまた複雑な挙動を示すことを明らかにした【論文準備中】。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計4件)

Takehisa Hasegawa and Koji Nemoto. Sudden spreading of infections in an epidemic model with a finite seed fraction. The European Physical Journal B. Vol.91 (2018) 58;1-8. 査読有.  
DOI: 10.1140/epjb/e2018-80343-3

Takehisa Hasegawa and Koji Nemoto. Efficiency of prompt quarantine measures on a susceptible-infected-removed model in networks. Physical Review E. Vol.96 (2017) 022311;1-8. 査読有.  
DOI: 10.1103/PhysRevE.96.022311

Tomoaki Nogawa, Takehisa Hasegawa, and Koji Nemoto. Local cluster-size statistics in the critical phase of bond percolation on the Cayley tree. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. Vol.2016 (2016) 053202. 査読有.  
DOI: 10.1088/1742-5468/2016/05/053202

Takehisa Hasegawa and Koji Nemoto. Outbreaks in susceptible-infected-removed epidemics with multiple seeds. Physical Review E. Vol.93 (2016)

032324;1-10. 査読有.  
DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032324

[学会発表](計 17 件)

発表者名の後ろに\*

Takehisa Hasegawa\*. Phase transition of infectious disease models in networks with finite seed fractions. Quantum walks and dynamics on networks, 東北大学, 2018 年.

能川知昭\*, 長谷川雄央. 階層スモールワールドネットワークにおけるパーコレーション転移の特異性の分類. 研究会「無限粒子系、確率場の諸問題 XIII」, 奈良女子大学, 2017 年.

岩瀬優太\*, 長谷川雄央. ランダムウォークモデルによるネットワークの辺の重みづけ. 日本物理学会 2017 年秋季大会, 岩手大学, 2017 年.

浮田裕基\*, 根本幸児, 長谷川雄央. 複雑ネットワーク上のパーコレーションにおける二段相転移の解析. 日本物理学会 2017 年秋季大会, 岩手大学, 2017 年.

長谷川雄央\*, 根本幸児. 複雑な接触伝播モデルの初期状態依存性. 日本物理学会 2017 年秋季大会, 岩手大学, 2017 年.

岩瀬優太, 長谷川雄央\*. 数理モデルによる bimodal salience distribution の実現. 第 5 回 Yokohama Workshop on Quantum Walks, 神奈川大学, 2017 年.

岩瀬優太\*, 長谷川雄央. 数理モデルによる bimodal salience distribution の実現. ネットワーク科学セミナー 2017, 統計数理研究所, 2017 年.

浮田裕基\*, 根本幸児, 長谷川雄央. 複雑ネットワーク上のパーコレーションにおける二段相転移の解析. ネットワーク科学セミナー 2017, 統計数理研究所, 2017 年.

能川知昭\*, 長谷川雄央. 階層スモールワールドネットワーク上の確率過程におけるロバストな臨界性 II. 日本物理学会第 72 回年次大会, 大阪大学, 2017 年.

岩瀬優太\*, 長谷川雄央. Link Salience による日本航空路線ネットワークの辺の分類. 日本物理学会第 72 回年次大会, 大阪大学, 2017 年.

長谷川雄央\*, 能川知昭. 階層ネットワーク上のパーコレーションの性質. 研究集

会「無限粒子系、確率場の諸問題 XII」, 奈良女子大学, 2017 年.

能川知昭, 長谷川雄央\*. 階層スモールワールドネットワーク上の確率過程におけるロバストな臨界性. 日本物理学会 2016 年秋季大会, 金沢大学, 2016 年.

根本幸児, 長谷川雄央\*. 複数の感染源が引き起こす感染症の爆発的拡がり. 日本物理学会 2016 年秋季大会, 金沢大学, 2016 年.

長谷川雄央\*, 根本幸児. ネットワーク上の感染症における隔離対策の効果. 日本物理学会 2016 年秋季大会, 金沢大学, 2016 年.

Takehisa Hasegawa\*. Outbreaks in the SIR epidemics with multiple seeds - a statistical physics approach. The 2016 (26th) annual meeting of the Japanese Society for Mathematical Biology (JSMB2016), Fukuoka, 2016.

長谷川雄央\*, 根本幸児. 複数の感染源を持つ SIR モデルが起こすパーコレーション転移. 日本物理学会 2015 年秋季大会, 関西大学, 2015 年.

Takehisa Hasegawa\*. Recent Problems of Network Science. The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2015), Beijing, China, 2015.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長谷川雄央 (Takehisa Hasegawa)  
茨城大学・理学部・准教授  
研究者番号: 10528425

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

### (4) 研究協力者

根本幸児 (Koji Nemoto)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授

能川知昭 (Tomoaki Nogawa)  
東邦大学・医学部・講師

岩瀬優太 (Yuta Iwase)  
茨城大学・大学院理工学研究科・院生

浮田裕基 (Yuki Ukita)  
北海道大学・大学院理学院・院生