

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：12101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800055

研究課題名(和文) 解析関数への乗法演算と合成演算の位相構造の研究

研究課題名(英文) Study on topological structure of multiplication and composition of analytic functions

研究代表者

細川 卓也 (Hosokawa, Takuya)

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号：90553579

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 2つの合成作用素の差のHilbert-Schmidt性をHardy空間やBergman空間を含むHilbert空間の上の場合に、シンボル関数の積分条件で特徴付けた。

(2) Hardy空間上の合成作用素の作用素方程式を解いた。

(3) シンボルが2つの正則自己写像で表されるような合成作用素のBergman空間上のコンパクト性を、シンボル関数の境界挙動で特徴付けた。

研究成果の概要(英文)：(1) We characterized the Hilbert-Schmidt properties of the differences of two composition operators between some Hilbert spaces of analytic functions by the conditions on the integrals of their symbol functions.

(2) We solved a certain operator equation of composition operators on Hardy space.

(3) We characterized the compactness of composition operators induced by the product of two analytic self-maps on Bergman space by the boundary behavior of those analytic self-maps.

研究分野：数学

キーワード：合成作用素 加重合成作用素 解析関数空間 函数解析学 複素解析学

### 1. 研究開始当初の背景

解析関数に対して考えられる作用で基本的かつ普遍的なものに積(multiplication)と合成(composition)があるが、これらの作用が関数環の構造に深く関わっていることが判る。

また、函数論の結果のいくつかは合成作用素の関数解析的な性質の特徴付けとして解釈される。例えば、J. E. Littlewood の subordination theorem や合成作用素の有界性の特徴付けとして、また、Koenigs による Schroeder 方程式の解の構成は、合成作用素の固有関数の構成として解釈される。このような函数論と関数解析学のインターフェイスとしての視点は、解析関数空間上の作用素の研究では本質的であり、作用素の関数解析的な性質を関数論的な性質で特徴付けることは 'Complex Analysis' の主要な目的の一つである。

一般に、解析関数空間  $X$  上の合成作用素の集合  $C(X)$  は線形空間にはならない。この事実を受けて、 $C(X)$  の作用素ノルムについての位相構造が、1990年代に Shapiro-Sundberg を始めとして、 $H^2$  や Bergman 空間上の場合に盛んに研究された。Shapiro-Sundberg による、2つの合成作用素  $C_1$  と  $C_2$  が  $C(H^2)$  の同じ連結成分に属することと、2つの合成作用素の差  $C_1 - C_2$  が  $H^2$  上のコンパクト作用素であることが同値であるとの予想が提示されている。結果としては、この予想には反例が見つかったが、 $C_1 - C_2$  の関数解析的な性質を調べるというテーマは、それ自身が興味深い研究対象として、多くの研究者によって研究されている。

$C(H^2)$  の位相構造は未だに完全に解明されていないが、2001年の MacCluer-Ohno-Zhao の論文と2002年の Hosokawa-Izuchi-Zheng の論文で、有界正則関数の空間  $H$  上の場合の合成作用素の空間  $C(H)$  の連結成分と孤立点、及び  $C_1 - C_2$  の  $H$  上のコンパクト性が、 $\rho$  と  $\rho'$  の擬双曲距離(から誘導される

距離)で完全に特徴付けられている。これらの結果は、 $C(H)$  の位相構造が Bloch 空間  $B$  に関係することを示唆しており、研究代表者は、大野修一氏との共同研究で、 $B$  上の  $C_1 - C_2$  のコンパクト性を、 $\rho$  と  $\rho'$  の双曲微分や擬双曲距離に関する条件で特徴付けた。他にも研究代表者は、 $C_1 - C_2$  の一般化として、 $H$  や  $B$  上において、荷重付き合成作用素の差  $uC_1 - vC_2$  の有界性とコンパクト性を特徴付けている。

### 2. 研究の目的

本研究課題における目的は、解析関数空間上の合成作用素および荷重合成作用素の線形結合で表わされる作用素の関数解析的な性質を、シンボル関数の函数論的な性質による条件で特徴付けることである。

具体的には、線形結合の特別な場合である差  $C_1 - C_2$  や  $uC_1 - vC_2$  の性質を調べることを始めとして、合成作用素の集合の位相構造を解明することを主目的とする。

### 3. 研究の方法

基本となる研究体制としては、研究代表者が国内外の研究協力者と、e-mail での情報交換や、研究打ち合わせの出張による討議や検討を重ねていくことにより進めていく。

以下では研究課題ごとに、研究方法を述べる。

(1) Bloch 空間上の合成作用素の位相構造については、研究協力者である日本工業大学の 大野修一氏やフィンランド、ヘルシンキ大学の P. Nieminen 氏と共に、シンボル関数の積分表現に表れる Aleksandrov-Clark 測度を用いて、コンパクトな合成作用素と非コンパクトな合成作用素を結ぶ連続なパスを構成することを試みる。

(2) 荷重合成作用素の研究としては、これまでに大野修一氏との共同研究において、Bloch 空間  $B$  から  $H$  への場合で、 $uC_1 - vC_2$  の有界性とコンパクト性を特徴付けている。その際、興味深い具体例を数多く構成しており、 $B$  と  $H$  の違いが浮き彫りになった。引き続き、 $B$  上の荷重付き合成作用素の位相構造について考え、連結成分を特徴付けたい。

また、別の方向の一般化として、有限個の荷重合成作用素の線形結合の  $B$  上での有界性とコンパクト性も課題として考えられる。

初めは、荷重函数が有界の場合から考察したい。

(3) 合成作用素の固有値問題は、古くから Schroeder 方程式として知られている。研究代表者はこれまでに、ヴェトナム、ハノイ教育大学の Quang Dieu Nguyen 氏との共同研究では、荷重合成作用素の固有値問題である weighted Schroeder 方程式の解を構成し、それが Bloch 空間に属するための十分条件を与えている。同様の固有関数の構成法を用いて、Bergman 空間や Hardy 空間上における荷重合成作用素の固有値問題を解くことを試みる。

#### 4. 研究成果

(1) Dirichlet 空間から Hardy 空間への合成作用素の Hilbert-Schmidt 性は、そのシンボル関数を用いた対数関数の円周上の可積分性として特徴づけられているが、これは、シンボル関数が  $H$  の単位閉球の端点であるという幾何学的条件と同値であることが知られている。この結果の一般化として、2つの合成作用素の差の Hilbert-Schmidt 性が、2つのシンボルの各点での値の pseudo hyperbolic distance に関する対数関数の円周上での可積分性で特徴づけられることを示した。さらに、新潟大学の泉池敬司名誉教授と日本工業大学の 大野修一准教授との共同研究で、Hardy 空間、Bergman 空間、Dirichlet 空間を含む Hilbert 空間の間の合成作用素の差の Hilbert-Schmidt 性の場合にまで一般化し、その特徴付けを与えることができた。この結果は論文としてまとめ、専門誌に投稿、出版済みである。

(2) 島根大学の瀬戸道生准教授と、Hilbert-Hardy 空間上の合成作用素に関する基本的な作用素方程式として、 $C_{\alpha} = C_{\beta}$   $X$  についての共同研究を行った。 $X$  の有界性を仮定した場合は、 $X$  が合成作用素になることは自明であるが、 $X$  が有界とは限らない場合まで含めてこの作用素方程式を考察し、有界な解  $X$  が存在することを、2つのシンボル  $\alpha$  と  $\beta$  に付随する Pick 行列の正值性によって特徴付けた。また、この Pick 行列が 2つの de Branges-Rovnyak 空間の再生核の比であることに着目し、解  $X$  の存在性を再生核 Hilbert 空間上の Toeplitz 作用素の有界性で記述した。この結果は論文としてまとめ、専門誌に投稿、出版済みである。

(3) シンボル関数の間の積構造が、合成作用素の性質にどのように対応するのか、という問題は、自然な設定であるにも関わらず、

過去に行われていなかった。研究代表者は大野修一氏との共同研究の中で、 $C_{\alpha}$  と  $C_{\beta}$  の性質がどのように  $C_{\alpha}(\cdot)$  に反映されるのかを調べ、 $C_{\alpha}(\cdot)$  の Bergman 空間上のコンパクト性を  $\alpha$  と  $\beta$  の条件で特徴付けた。現在は、Hardy 空間と Bloch 空間の場合を研究中であり、2編の論文を準備中である。また、いくつかの研究集会等で、得られた結果を発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. Takuya Hosokawa, Kei Ji Izuchi, Shuichi Ohno, Weighted composition operators between Hilbert spaces of analytic functions in the operator norm and Hilbert-Schmidt norm topologies, J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), no. 2, 1546--1558. (査読有)
2. Takuya Hosokawa, Michio Seto, Some remarks on operator equation  $C_{\alpha} = C_{\beta} X$ , Nihonkai Math. J. **25** (2014), no. 2, 85--91. (査読有)

[学会発表](計 5 件)

1. 細川卓也, 単位円板上の正則自己写像の積と合成作用素の性質について, つくばセミナー, 2016年3月7日, 筑波大学
2. 細川卓也, Composition operators with product symbols, 2015年度 関数環研究集会, 2015年12月19日, 新潟大学 駅南キャンパス「ときめいと」
3. 細川卓也, Weighted composition operators between Hilbert spaces of analytic functions in Hilbert-Schmidt norm topologies, 日本数学会 2015年度 秋季総合分科会, 2015年9月15日, 京都産業大学
4. 細川卓也, Linear combinations of composition operators on  $H^{\infty}$  and the Bloch space, 2013年 作用素論・作用素環論研究集会, 2013年11月24日, お茶の水女子大学 (招待講演)
5. 細川卓也, Differences of weighted composition operators from  $H^{\infty}$  to the Bloch space, 2013日本数学会 秋季総合分科会, 2013年9月25日, 愛媛大学 城北キャンパス

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

細川 卓也 (Hosokawa, Takuya)

茨城大学・工学部・准教授

研究者番号：90553579

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：