

| | |
|---------|---|
| 氏名 | 新井 龍太郎 |
| 学位の種類 | 博士（理学） |
| 学位記番号 | 博理工第658号 |
| 学位授与年月日 | 令和2年3月24日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第4条第1項該当 |
| 学位論文題目 | 一般化モリー空間における，一般化カンパナト空間に属する関数を伴うカルデロン・ジグムント作用素および一般化分数べき積分作用素の交換子 |
| 審査会 | 主査 堀内 利郎 委員 下村 勝孝 委員 中井 英一 委員 澤野 嘉宏 |

Abstract

Let \mathbb{R}^n be the n -dimensional Euclidean space. In this paper we consider the commutators $[b, T]$ and $[b, I_\rho]$, where T is a Calderón-Zygmund operator, I_ρ is a generalized fractional integral operator and b is a function in generalized Campanato spaces $\mathcal{L}^{(1,\phi)}(\mathbb{R}^n)$ with variable growth condition. We give necessary and sufficient conditions for the boundedness and compactness of the commutators on generalized Morrey spaces with variable growth condition.

It is well known that T is bounded on $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$). Coifman, Rochberg and Weiss (1976) proved that, for $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, the commutator $[b, T] = bT - Tb$ is also bounded on $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$), that is,

$$\|[b, T]f\|_{L^p} = \|bTf - T(bf)\|_{L^p} \leq C\|b\|_{\text{BMO}}\|f\|_{L^p},$$

where C is a positive constant independent of b and f . They also gave a necessary condition for the boundedness, that is, $[b, T]$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^n)$ if and only if $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$. For the fractional integral operator I_α , Chanillo (1982) gave a necessary and sufficient condition for the L^p - L^q boundedness of $[b, I_\alpha]$. These results were extended to Morrey spaces by Di Fazio and Ragusa (1991).

On the other hand, Uchiyama (1978) gave a necessary and sufficient condition for the compactness of commutator $[b, T]$ on $L^p(\mathbb{R}^n)$. Namely, he proved that $[b, T]$ is compact on $L^p(\mathbb{R}^n)$ if and only if $b \in \text{CMO}(\mathbb{R}^n)$, where $\text{CMO}(\mathbb{R}^n)$ is the closure of $C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$. This result was extended to Morrey spaces by Sawano and Shirai (2008) and Chen, Ding and Wang (2009, 2012).

In this paper we further extend all above results to generalized Morrey spaces with variable growth condition, by using Calderón-Zygmund operators T , generalized fractional integral operators I_ρ and functions $b \in \mathcal{L}^{(1,\phi)}(\mathbb{R}^n)$ generalized Campanato spaces with variable growth condition.

To prove the boundedness we show the norm estimates for the sharp maximal operators and the pointwise estimates for the sharp maximal operators of the commutators by the generalized fractional maximal operators. Then we use the boundedness of the generalized fractional maximal operators. Moreover, To prove the compactness we give relations between generalized Morrey spaces with variable growth condition and Musielak-Orlicz spaces. Then we give a criterion for the compactness of integral operators on generalized Morrey spaces with variable growth condition. We also extend the characterization of $\text{CMO}(\mathbb{R}^n)$ to the closure of $C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^{(1,\phi)}(\mathbb{R}^n)$ generalized Campanato spaces with variable growth condition.

審査要旨

本学位論文は、積分作用素と関数の掛け算作用素との交換子について論じている。

まず、 \mathbb{R}^n を n 次元ユークリッド空間、 T を Calderón-Zygmund 特異積分作用素、 $BMO(\mathbb{R}^n)$ を有界平均振動関数の空間とする。Coifman, Rochberg and Weiss (1976) は、 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ に対して、交換子 $[b, T] = bT - Tb$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) 上の有界作用素となることを証明した。すなわち、 b と f に依存しない正の定数 C が存在し、次の評価式が成り立つ。 $\|[b, T]f\|_{L^p} = \|bTf - T(bf)\|_{L^p} \leq C\|b\|_{BMO}\|f\|_{L^p}$. 特異積分作用素は L^p -有界性が知られており、 b が有界関数であればこの評価式は明らかである。しかし、一般に有界とは限らない有界平均振動関数 b に対してもこの評価式が成り立つ。さらに、彼らは、 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ であることは $[b, T]$ が有界となるための必要条件であることも証明した。Chanillo (1982) は、分数べき積分作用素 I_α に対して交換子 $[b, I_\alpha]$ を考察し、同様の結果を得た。以上の結果は、Di Fazio and Ragusa (1991) により Morrey 空間に拡張されている。

一方、Uchiyama (1978) は、 $[b, T]$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上のコンパクト作用素となるために、 $b \in CMO(\mathbb{R}^n)$ であることが必要十分条件となることを証明した。 $CMO(\mathbb{R}^n)$ は、コンパクト台を持つ無限回微分可能関数の空間 $C_{\text{comp}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ の $BMO(\mathbb{R}^n)$ に関する閉包である。その際 Uchiyama は、平均振動量により $CMO(\mathbb{R}^n)$ の関数を特徴づける 3 条件を証明し、これを用いた。

本学位論文では、交換子 $[b, T]$ と $[b, I_\rho]$ を変動増大度を伴う一般化 Morrey 空間 $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ 上で考察した。ここで、 T は Calderón-Zygmund 作用素、 I_ρ は一般化分数べき積分作用素、 b は変動増大度を伴う Campanato 空間 $\mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ の関数である。この $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ は、 L^p 空間や Morrey 空間を特別な場合として含むもの、また $\mathcal{L}_{1,\psi}(\mathbb{R}^n)$ は $BMO(\mathbb{R}^n)$ 上の掛け算作用素の研究により導入された関数空間で、 $BMO(\mathbb{R}^n)$ や Lipschitz 空間を特別な場合として含むものである。したがって、本学位論文の結果は、上記すべての結果を大幅に拡張したものである。

本学位論文では、まず、 $[b, T]$ と $[b, I_\rho]$ の $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ 上での有界性を証明するため、シャープ最大作用素と一般化分数べき最大作用素の有界性、および I_ρ の $L^p(\mathbb{R}^n)$ から Musielak-Orlicz 空間への有界性等を証明して、これらを用いた。また、有界性に対する必要条件を証明するために、Janson (1978) の方法を巧みに適用した。次に、 $[b, T]$ と $[b, I_\rho]$ の $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ 上でのコンパクト性を証明するため、有限次元作用素による近似と、 $L^{(p,\varphi)}(\mathbb{R}^n)$ と Musielak-Orlicz 空間との包含関係を証明して、これらを用いた。さらに、コンパクト性に対する必要条件を証明するため、Uchiyama (1978) の 3 条件を、軟化子と滑らかな切り落とし法を用いて、変動増大度を伴う Campanato 空間に拡張し、これを用いた。

滑らかさや可積分性が場所に依存しない古典的関数空間に対して、2000 年以降、滑らかさや可積分性が場所に依存する関数の空間が注目され、研究が世界的に急速に進展している。こうした中で、本研究はこれまでにない先端的研究であり、高く評価できるものである。また、これらの研究成果は、英文の学術論文 3 篇にまとめられ、国内外の査読付き学術雑誌（すべてインパクトファクター付き）に掲載されている。

以上の理由により、本学位論文は茨城大学大学院理工学研究科における博士学位論文の評価基準を満たしており、合格と判定する。