茨城大学全学教育機構論集　大学教育研究　第 5 号（2022），85-92

数的知識および作図技能と大学授業科目の学習到達度の関係：

多変数関数の微積分を例に

矢内　浩文*

（2022 年 2 月 2 日 受理）

Some Relations between Achievement of College Study and Numerical Knowledge or Graph Drawing Skill:
A Case Study on Multivariable Calculus

Hiro-Fumi YANAI*

(Received February 2, 2022)

Abstract

「大学ではじめて学ぶ数学の学習到達度」と「大学入学試験で問うには平易すぎる知識や技能」の関係を明らかにすることを目的とする。その関わりが明らかになれば、大学入学後の早い段階で大学数学の学習到達度を予測できる。また、教室内および授業外学習の指導に活かすことが可能となる。1 年次後期の数学科目（多変数関数の微積分）の授業を通じて収集したデータを分析した。その結果、期末試験の合格率を予測できる指標を見いだすことができた。指標は、次のような知識および技能から定義した。抜粋する。「正しく書けた 2 の平方根の桁数」「正しく書けた e（ネーピア数）の桁数」「連立不等式を満たす領域の図示の正しさ」「関数 f(x)の曲線が与えられたときの f(2x)の図示の正しさ」などである。

キーワード：平方根、円周率、自然対数の底、作図、相関、偏微分、重積分、初年次教育、
math achievement, math anxiety, graph drawing, Approximate Number System

1．はじめに

これは「大学ではじめて学ぶ数学の学習到達度」と「大学入学試験で問うには平易すぎる知識や技能」の関係を明らかにしようとするものである。ここでいう知識は、平方根の近似値や、家庭用交流電源の周波数、1 インチは何センチメートルか、などである。必要に迫られて覚えている知識

* 茨城大学 工学部 電気電子システム工学科；Department of Electrical and Electronic Systems, School of Engineering, Ibaraki University

ばかりでなく、興味があって知っている、あるいは覚えている知識も含めて考える。数値だけでなく、条件を満たす平面の領域の描画や、数式で表わされておらず図としてのみ与えられた関数の変換結果を図示する課題も取りあげる。それらの課題を通じて、グラフの知識と、図で表現する技能に注目する。大学ではじめて学ぶ数学の学習到達度と、上記の知識や技能の関係が明らかになれば、大学入学後の早い段階で大学数学の学習到達度を予測できる。また、教室内および授業外学習の指導に活かすことが可能となるだろう。

1 年次後期の数学科目（多変数関数の微積分）の授業を通じて得られたデータを分析した。その結果、期末試験の合格率を予測できる指標を見いだすことができた。指標は、次のような知識や技能から定義されたものである。「正しく書けた $\sqrt{2}$ の桁数」「正しく書けた e（ネーピア数）の桁数」「連立不等式を満たす領域の図示の正しさ」「関数 $f(x)$ の曲線が与えられたときの $f(2x)$ の図示の正しさ」「関数 $f(x)$ の曲線が与えられたときの $f(-x)$ の図示の正しさ」などである（詳しくは図 1 を参照）。

物理学の授業の成績と、関数のグラフの描画能力の関係に的を絞り、その相関を考察した取り組みは、ここでの取り組みと問題意識に似ている部分がある。基本的な関数のグラフが描けるかどうかが、大学の物理学の成績に直結することは自明ではないからである。理学部および工学部の 1 年生について調べ、直結とはいえないものの、物理学の成績とグラフ描画能力には正の相関があることが示された (西村, 2001)。ここでは、それより一層、非自明な「問い」を設定した。すなわち、「1 変数関数の微分が身についていなければ多変数関数の微分を理解することは困難か？」というような自明な関係ではない。そうではなく、「$\sqrt{2}$ の近似値を多数桁覚えている学生は多変数関数の微積分の学習到達度が高い傾向があるか？」のような非自明な関係を探索し、明らかにしようとするものである。

この種の、直接には関係のなさそうな能力の非自明な相関を詳しく考察した代表例は Spearman である。数学と語学の成績の相関ほど高くはないものの、知覚量（音高、重さ、色の濃さ）の弁別能力と数学の成績にも正の相関があることが報告されている (Spearman, 1904)。非言語的（non-verbal）であるという意味で、知覚量の弁別に分類されうる能力の一つに ANS 感度（Approximate Number System acuity）がある。これは、画面にランダムに散りばめられた 2 種類のドットの数の大小を素早く判断する能力である。特に、初等教育の算数（数学）との相関を調べた例が多い。小学校から中学校にかけての算数（数学）のテストの成績と ANS 感度には高い相関があることが示されている (Halberda e*t al*., 2008)。また、幼稚園児を中学生まで追跡した研究によれば、幼稚園当時、指定された数から 1 つずつ増やして口頭で発する、あるいは 1 ずつ減らすなどの能力によって、中学生になったときの数学能力を予測できることが示された (Koponen, 2019)。数と数学について多様な観点から解説されている単行本もある (バターワース, 2001)。

さて、わたしはかねてより、教員会議や教育 FD（Faculty Development）などで度々話題になる「雑談」について考えてきた。学生はあれができない、これができない、1 年生の授業で教えたはずなのに 2 年生になると忘れているなど、貴重な情報ではあるが時の流れとともに消え去ってしまう情報のことである。学生について飛び交うそれら「雑談」の客観的な分析ができないかと考えてきた。

そこで、問題を明確化するための取り組みを始めた。それは、「1 年生で教えたはずの知識が失われるのは、知識の伝え方が悪いのか、それとも、その知識の土台となる入学前の知識や技能の不足が影響しているのかを特定すること」であった。わたしが「基礎知識等確認テスト」と名付けたテストを、一教員として、自身の担当する 1 年生向けの授業（多変数関数の微積分）の初回に実施し

た。その結果を匿名化し、学科内で回覧した。「○○を知らないなら、○○から教えなければならない」「□□を知っているのに◇◇の知識が定着しないのは何が悪いのだろうか」など、教員側の判断材料としてもらうためであった。その取り組みを発展させるべく、定量的な分析を試みた。「基礎知識等確認テスト」（図 1）のうち、評価の客観的定量化が容易な課題に絞った分析である。

ここで取りあげる「大学数学」はあくまでも入り口に過ぎない。この方法論が他の科目、あるいは、さらに広げて、大学生活への適応性などにもあてはまる可能性があると考えている。大学教育のさまざまな観点から、あるいは大学教育に限らないさらに広い観点からの貢献もあり得るだろう。

２．分析

ここでは、まず、データとその収集法を示す。「基礎知識等確認テスト」の出題意図についても述べる。続いて、18 の設問への解答から 18 の変数を定義する。それら変数の中から、相関の高さと相関の有意性を基準に 2 つの指標を定義する（指標 1 と指標 2）。

2.1 分析のためのデータと収集法

データは、工学部 1 年生向けに後期に開講された数学科目（多変数関数の微積分）の授業内で収集した。分析に用いたのは「基礎知識等確認テスト」の答案と、期末試験の答案である。「基礎知識等確認テスト」と期末試験の両方に取り組んだ 219 名について分析した。

図 1 は「基礎知識等確認テスト」である。各設問の出題意図は次の通りである。第 1 問は、数字列に対する興味や関心の度合いを、記憶している桁数を通じて見る。第 2 問は、日常的に触れ、見聞きするモノに対する関心の度合いを見る。第 3 問は、もっとも基本的な図形である直線と円に関する理解度と、理解を図示する技能を見る。第 4 問については、具体的に数式で表現されていれば、グラフの変換は容易である。しかし、ここでは具体的な数式表現がないため、問題に解答するためには概念の理解が必要である。その概念の理解度を見る。第 5 問は、おおよそどのような立体図形になるかは、少なくとも漠然とは把握できる。その把握した結果を具体的に、かつ正しく、俯瞰的に表現できるかどうかを見る。

「基礎知識等確認テスト」の実施条件などについて説明する。A4 サイズの用紙に各辺 2cm の余白を設けた (図 1 は余白を取り除いたものである ; また、図は見やすさのために枠で囲ってあるが、実際には枠線はない)。「基礎知識等確認テスト」は初回の授業内で、授業の本題に入る前に実施した。このテストの出来は授業の成績には影響しないこと。受講生の基礎知識等を確認し教育の改善に活かすために実施しているものであること。匿名化し、学科教員の間で回覧すること。これらを述べた上で、制限時間 20 分で、筆記テストの形で実施した。テストへの取り組み時に机の上に置いてよいものはペンと消しゴムのみとした。

期末試験は後期の授業終了後に、制限時間 90 分で、10 問を出題した。期末試験の設問の内容は以下の通りであった。各 10 点、満点は 100 点。

ヤコビアン / 等高線の描画 / 方向微分係数 / 微小移動と高さ変化の関係 / 極値の判定 / ラグランジュ乗数法 / 基本的な累次積分の計算 /2 重積分の計算 / 変数変換を用いた 2 重積分の計算 / 積分順序の交換

1 近似値を記せ．

$\sqrt{2}$ = $\boxed{\qquad\qquad}$

$\sqrt{3}$ = $\boxed{\qquad\qquad}$

$\sqrt{5}$ = $\boxed{\qquad\qquad}$

$\sqrt{7}$ = $\boxed{\qquad\qquad}$

π = $\boxed{\qquad\qquad}$

e = $\boxed{\qquad\qquad}$

2 以下の空欄を埋めよ．条件によって値に相違がある場合には現在地の数値で答えよ．

- 1 インチ = $\boxed{\qquad}$ センチメートル
- 1 ミリ秒 = $\boxed{\qquad}$ 秒
- 家庭用交流電源の周波数は $\boxed{\qquad}$ ヘルツ．
- テレビの画面は毎秒 $\boxed{\qquad}$ コマ．

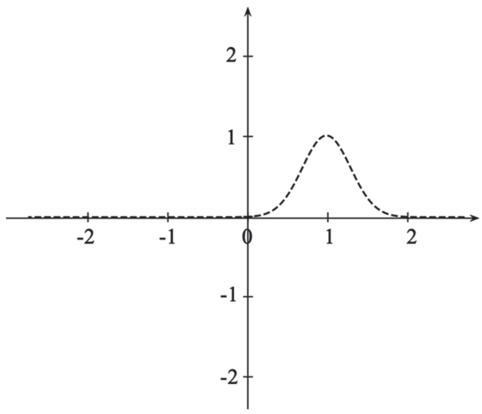
3 条件式を同時に満たす領域を xy 平面に図示せよ．

(a) $1 < x + y < 2, \quad x > 0, \quad y > 0$

(b) $1 < x^2 + y^2 < 2, \quad x > 0, \quad y > 0$

4 図の破線が $y = f(x)$ であるとき，以下の関数の曲線を描け．

① $y = 2f(x)$
② $y = f(2x)$
③ $y = f(x+2) + \frac{1}{2}$
④ $y = f(-x)$



5 斜線の平面図形を，示された軸のまわりに回転させてできる立体の全体的な形が分かる図を描け．

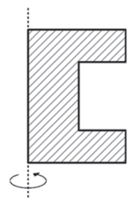


図 1　「基礎知識等確認テスト」問題。制限時間は 20 分。机の上に置いてよいのはペンと消しゴムのみ。各設問の出題意図については本文（セクション 2.1）を参照。

2.2 分析のための変数と指標

第 1 問から第 4 問までを分析対象とした。下記の括弧内を変数名とする（**Sqrt2**、**Sqrt3**、…、**Curve4**)。変数は 18 個である。なお、★は、分析の結果、期末試験の得点との相関の（絶対値の）大きな順に選ばれた 8 変数である（表 1 を参照)。

(Sqrt2★) $\sqrt{2}$ の近似値
(Sqrt3) $\sqrt{3}$ の近似値
(Sqrt5) $\sqrt{5}$ の近似値
(Sqrt7) $\sqrt{7}$ の近似値
(Pi) π の近似値
(E★) ネーピア数 e の近似値
(Inch) 1 インチは何センチメートルか
(Millisec) 1 ミリ秒は何秒か
(ACfreq) 家庭用電源の周波数は何ヘルツか
(TVrefresh) テレビの画面は毎秒何コマか

条件式 $1 < x + y < 2,\ x > 0,\ y > 0$ を満たす領域を図示する課題
評価の観点：
(Draw1) 図の正しさ
(Axes1★) 軸に添えた数字の正しさ

条件式 $1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0,\ y > 0$ を満たす領域を図示する課題
評価の観点：
(Draw2★) 図の正しさ
(Axes2★) 軸に添えた数字の正しさ

図の破線を $y = f(x)$ とするときの、以下の関数の曲線を図示する課題
(Curve1) $2f(x)$
(Curve2★) $f(2x)$
(Curve3★) $f(x+2) + \frac{1}{2}$
(Curve4★) $f(-x)$

近似値（**Sqrt2** から **E** まで）については、次の式で定義する関数 $\phi(u)$ を用いて、解答の精度を点数化した。この関数で定まる点数の値は、おおよそ、正しく書けた桁数になる。値は一般には小数となる。書かれた数字の一部が合っていない場合でも、解答の精度を曖昧さなく点数化できる利点がある。

$$\phi(u) = -\log_{10}\left|\frac{u - exactValue}{exactValue}\right|$$

ここに、u は近似値として書かれた解答、$exactValue$は厳密値である。たとえば **Sqrt2** についてなら、$exactValue = 1.41421356\cdots$ であるから、解答が $u = 0$ であれば $\phi(0) = 0$ となり、正しく書けた桁数が 0 桁であることと対応している。解答が $u = 1.4$ であれば $\phi(1.4) = 1.997\cdots \simeq 2$ となり、正しく書けた桁数が 2 桁であることと対応している。解答が $u = 1.414$ であれば

$\phi(1.414) = 3.820\cdots \simeq 4$ となり、正しく書けた桁数が4桁であることと対応している。**Inch** については正解者が6名（2.7%）と少なかったため、正解に幅を持たせた。すなわち、2以上3以下であれば1点、それ以外は0点とした。**Millisec** については、次の関数 $\psi(u)$ で点数化した。

$$\psi(u) = \max\left(0, 3 - \left|\log_{10}\frac{u}{0.001}\right|\right)$$

$\psi(u)$ は要するに、正しい値 $u = 0.001$ であれば3点となる。0の数がひとつ少ない（0.01）か、またはひとつ多い（0.0001）なら2点、0の数の違いが2つならば1点、違いが3つ以上なら0点である。**ACfreq** については50または60なら1点、それ以外は0点とした。**TVrefresh** については、30以上60以下であれば1点、それ以外は0点とした。領域や関数の図示（**Draw1** から **Curve4** まで）については、正しければ1点、間違っていれば0点とした。

表1は、期末試験の得点と18の各変数との相関係数である。相関係数の大きな上位8変数（★付き）から**指標1**を、相関係数の有意性（$p < 0.05$）で選択した6変数から**指標2**を定義した。なお、指標1で第3項が5倍されている理由は次の通りである。近似値課題（Sqrt2からEまで）の点数は正しく書けた桁数であるため点数の幅が広い。それに対し、図示課題（Draw1からCurve4まで）は1点または0点である。近似値課題と図示課題の平均点を比較したところ、近似値課題の点数は図示課題のおおよそ5倍であった。指標を構成する各項のバランスをとるために、図示課題の点数を5倍した。

指標1 = ϕ(Sqrt2) + ϕ(E) + 5 (Axes1 + Draw2 + Axes2 + Curve2 + Curve3 + Curve4)

指標2 = Axes1 + Draw2 + Axes2 + Curve2 + Curve3 + Curve4

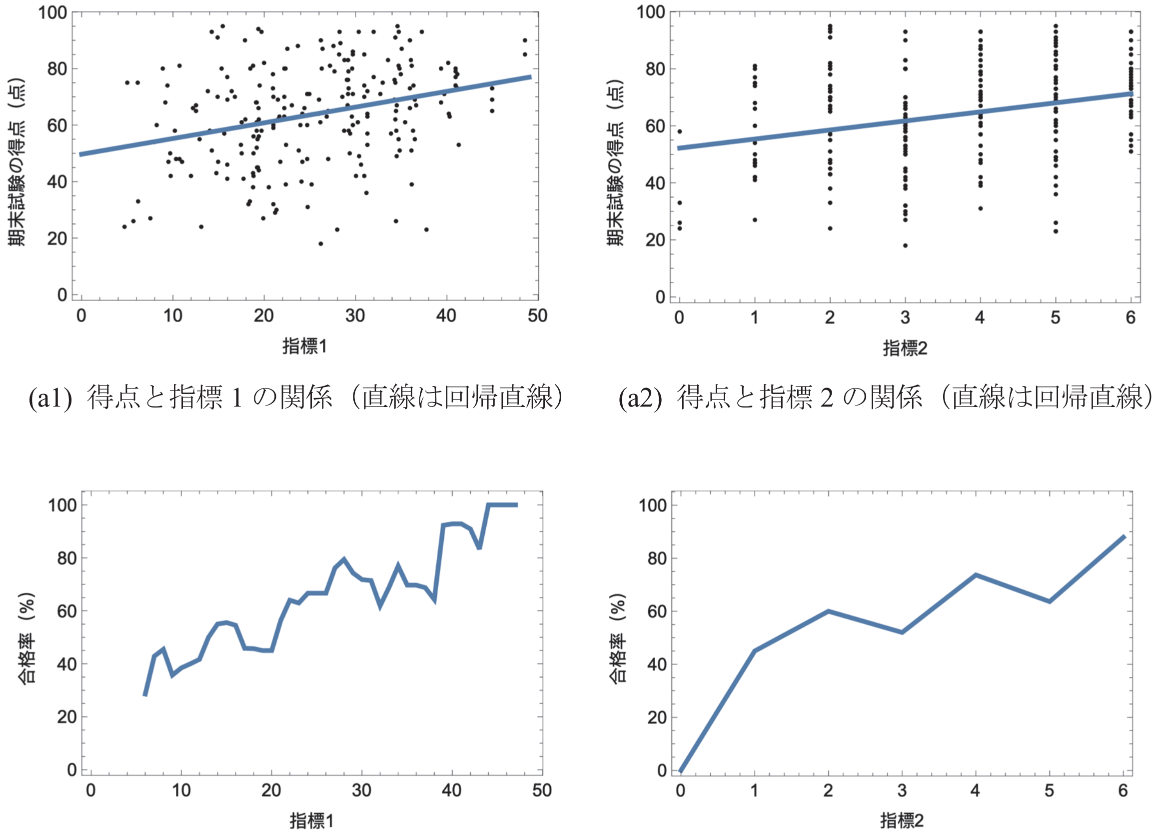
表1　「期末試験の得点」と各変数との相関係数。 * $p < 0.05$。

Sqrt2★	Sqrt3	Sqrt5	Sqrt7	Pi	E★	Inch	MilliSec	ACfreq
0.134	0.093	0.082	0.003	-0.036	0.101	-0.005	-0.006	0.053

TVrefresh	Draw1	Axes1★	Draw2★	Axes2★	Curve1	Curve2★	Curve3★	Curve4★
0.013	0.037	0.163*	0.219*	0.150*	0.048	0.182*	0.153*	0.147*

３．結果

図2の上段は、期末試験の得点と各指標の関係である。指標の値が大きいほど、期末試験の得点が高い傾向がある。図2の下段は、合格率と各指標の関係である。期末試験の得点が60点以上で合格である。合格率では、指標との関係がより鮮明である。合格率と指標1の関係は直線的である。なお、ϕ(Sqrt2) と ϕ(E) が連続量であることにより、指標1は連続量である。そのため、合格率と指標1の関係については、指標1の区間幅5で移動平均をとってある（図2 (b1)）。指標2の取りうる値は離散的である（= 0, 1, …, 6）。よって、合格率と指標2の関係（図2 (b2)）については、指標2の値ごとの合格率である。指標2の値が1から6では、合格率の上昇は直線的である。



(a1) 得点と指標 1 の関係（直線は回帰直線）　(a2) 得点と指標 2 の関係（直線は回帰直線）

(b1) 合格率と指標 1 の関係　(b2) 合格率と指標 2 の関係

図 2　「期末試験の得点と各指標の関係（散布図と回帰直線）」（(a1) 指標 1、(a2) 指標 2）および「合格率と各指標の関係」（(b1) 指標 1、(b2) 指標 2）。合格は 60 点以上。(b1) については区間幅 5 の移動平均。

4．考察と課題

2 の平方根およびネーピア数 e の近似値の知識と、基本的な関数を図示する知識と技能の一部から、2 つの指標（指標 1 と指標 2）を定義した。2 つの指標は、多変数関数の微積分の期末試験の得点と正の相関があることを示した。また、期末試験の得点の代わりに合格率との関係を調べたところ、得点よりもさらに明確な傾向が表われた。このことは、大学で初めて学ぶ比較的高度な数学の学習到達度が、近似値の知識や、基本的な関数を図示する知識や技能から予測可能であることを示している。大学の授業に取り組む前に、学習上の困難の有無を予測できるということである。予測結果を踏まえて、授業時の対応、あるいは授業外学習の指導に反映させることができれば、初年次教育に活用できるだろう。

このように、ある程度の明確な結果がえられたものの、分析にはまだ改善あるいは発展の余地がある。「1 インチが何センチメートルか」「1 ミリ秒は何秒か」については、点数化の精度が低かった。これらの変数が指標としての採用基準に満たなかった原因が、この点数化の精度にある可能性も否めない。客観的な評価がやや困難であるとの理由から、まだデータ化していない設問（第 5 問

＝立体の形を描く）を点数化し、予測に活用することも今後の課題である。

今回の分析では、論理的あるいは形式的な正しさ、言い換えれば、主に知識の正しさを点数化した。しかし、正しさのみならず、きれいに描く（などの）技能をも点数化することで、より確度の高い予測ができる可能性がある。なぜなら、体力や運動能力が、（小学生を対象とした研究ではあるものの）算数の学習到達度と相関があることが示されている (de Bruijn *et al.*, 2019) からである。また、論理および数学力のみならず、自己認識力や判断力が工学系大学生の科目成績に影響する要因となっていることも示されている (Gonzalez-Nucamendi *et al.*, 2021)。加えて、2 種類のドットの個数の多少を判断する非言語的課題の成績（上述の ANS 感度）が、大学生の数学苦手感を予測する指標となっているという (Lindskog *et al.*, 2017)。これらを踏まえると、図を描画する際の自信の表われ度や、見る人に伝えようという意識の高さなど、形式的な正しさを超えた評価を導入する価値があると思われる。たとえば、線の濃さ、線のぶれ具合などである。そのためには、描画の客観的な処理、つまりコンピューター画像処理の手法を導入する必要があると考えている。

謝辞

本研究の一部は 2018 年度茨城大学教育改善奨励経費（研究代表者 : 矢内浩文）の助成を受けて行われました。本研究を進めるにあたり、さまざまなコメントをいただいた茨城大学工学部機械システム工学科の梅津信幸氏に感謝します。

引用文献

バターワース, B. (2001) 『なぜ数学が「得意な人」と「苦手な人」がいるのか』, 主婦の友社.

de Bruijn, A.G.M., Kostons, D.D.N.M., van der Fels, I.M.J., Visscher, C., Oosterlaan, J., Hartman, E., Bosker, R.J. (2019) Importance of aerobic fitness and fundamental motor skills for academic achievement, *Psychology of Sport and Exercise*, **43**, pp. 200-209.

Gonzalez-Nucamendi, A., Noguez, J., Neri, L., Robledo-Rella, V., García-Castelán, R.M.G., Escobar-Castillejos, D. (2021) The prediction of academic performance using engineering student's profiles, *Computers & Electrical Engineering*, **93**, 107288.

Halberda, J., Mazzocco, M.M.M., and Feigenson, L. (2008) Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement, *Nature*, **455**(7213), pp.665-668.

Koponen, T., Aunola, K., Nurmi, J.-E. (2019) Verbal counting skill predicts later math performance and difficulties in middle school, *Contemporary Educational Psychology*, **59**, 101803.

Lindskog, M., Winman, A., Poom, L. (2017) Individual differences in nonverbal number skills predict math anxiety, *Cognition*, **159**, pp. 156-162.

西村鷹明. (2001) 大学 1 年生の関数形描画能力と物理学成績の相関, 大学の物理教育, **2**, pp. 48-52.

Spearman, C. (1904) "General Intelligence," objectively determined and measured, *The American Journal of Psychology*, **15**, No. 2, pp. 201-292.